

Aplicações da teoria da inversão à interpretação geofísica

Aula teórica:

Os métodos de exploração geofísica têm como objetivo obter informação sobre as distribuições de diferentes propriedades físicas em subsuperfície de **modo indireto**. Para tanto, o geofísico lança mão de entidades físicas que atravessam a matéria, permitindo que certas grandezas ligadas a essas entidades sejam medidas na superfície, acima dela ou mesmo em poços. Por exemplo, a medição do campo eletromagnético secundário, do campo gravimétrico, do campo magnético e do tempo de trânsito de uma perturbação elástica formam a base para os métodos: eletromagnético, gravimétrico, magnético e sísmico de exploração geofísica.

A partir de N medidas geofísicas realizadas, digamos, na superfície, o geofísico se propõe a determinar a distribuição espacial contínua de uma propriedade física em subsuperfície. Isto é evidentemente um problema subdeterminado já que uma variação contínua de propriedade física é definida por um número infinito de parâmetros (o valor da propriedade física em cada ponto x, y, z da subsuperfície), de modo que há menos dados neste problema que incógnitas. Problemas desse tipo em que o intérprete demanda uma quantidade de informação maior que aquela contida nos dados são chamados problemas mal-postos no sentido de Hadamard (Hadamard, 1902). A tentativa de se resolver um problema mal-posto é despropositada porque a solução ou não existe, ou não é única ou não é estável. Por exemplo: a) encontrar dois números inteiros que somam 20.7 é um problema mal-posto porque a solução não existe; b) encontrar dois números inteiros cuja soma é 10 é um problema mal-posto porque admite infinitas soluções; estimar x da equação $0,000001 x = y$ é um problema mal-posto porque se y contém um erro δ , a solução $x = y/0.000001 + \delta/0.000001$ é instável na presença de um ruído δ que contamina a observação y .

Problemas mal-postos podem ser simples ou complexos e ocorrem em todas as áreas do conhecimento, independentemente do grau de quantificação da área. Por exemplo: na Arqueologia, que é uma área de conhecimento pouco quantificada temos questões bem e mal-postas. Por exemplo: a) Ao encontrar um túmulo neolítico o arqueólogo se pergunta: o fato do homem do neolítico enterrar seus mortos indica que eles acreditavam numa vida após a morte? Esse é um problema mal-posto pois admite mais de uma solução: ou a crença numa vida após a morte, ou apenas uma questão de higiene. b) Ao encontrar pontas de flechas feitas de sílex lascado, o arqueólogo pergunta se as pessoas que elaboraram essas peças eram caçadores. Essa pergunta é bem-posta pois só admite uma resposta que não desafia o bom senso: sim, pois seria muito improvável a fabricação de pontas de flechas apenas como passatempos.

Vejamos agora problemas bem e mal-postos na Matemática, que é a área do conhecimento mais quantificada. Dadas as definições: 1) **a, b e c são elementos** e 2) **S é uma afirmação** e admitindo-se os axiomas: 1) **$\text{Se } b = S(a) \rightarrow a \neq$**

$S(b)$; 2) $\forall a, b, c$, se $b = S(a)$ e $c = S(b) \Rightarrow c = S(a)$. O problema de determinar qual o modelo que satisfaz a esses axiomas é mal-posto porque existem pelo menos dois modelos. Um deles, modelo A, é aquele em que a, b e c são pontos numa reta e S é a afirmação “*está à direita de*”. O segundo modelo (modelo B) é aquele em que a, b e c são conjuntos e S é a afirmação “*está contido em*”. Para poder determinar de modo único qual o modelo correto, é preciso mais informação, ou seja: mais um axioma. Nesse caso, basta acrescentar o seguinte axioma: “**para todo a , $\exists b \neq a \mid a \neq S(b)$ e $b \neq S(a)$** ”. O modelo A claramente não satisfaz a esse terceiro axioma, mas o modelo B satisfaz no caso de conjuntos disjuntos.

Os geofísicos, historicamente, não propuseram sempre problemas mal-postos. Para entender mais claramente a evolução dos métodos de interpretação geofísica é conveniente fazer uma classificação desses métodos em quatro fases. As bases para tal classificação são: a) base informativa consistindo de todo o tipo de informação geofísica e geológica disponível, incluindo-se em “informação geofísica” as próprias observações geofísicas; b) a base material, consistindo dos meios para a realização das interpretações: cálculos manuais ou através de calculadoras, computadores, etc.; c) base metodológica, englobando toda a formalização teórica necessária para a produção de métodos, técnicas e algoritmos de interpretação. De acordo com essas bases, as quatro fases são:

Primeira Fase: do início do século até fins da década de 40. Durante esta fase a base informativa é caracterizada por um volume de dados geológicos modesto e por dados geofísicos esparsos e de baixa qualidade uma vez que os equipamentos existentes, além de serem de difícil e demorada operação, possuíam baixíssima resolução. A base material era manual e restrita, ou seja, os cálculos eram executados manualmente por uma equipe restrita de especialistas. A base metodológica, em resposta às situações das bases informativa e material era voltada à interpretação de anomalias isoladas com alta amplitude e com alta razão sinal/ruído. Os problemas geofísicos nessa fase eram principalmente de dois tipos: 1) detecção, ou seja, saber se, dada uma anomalia geofísica, havia uma correspondente anomalia de propriedade física em subsuperfície; 2) localização, ou seja, determinar as coordenadas x, y e z de um ponto da fonte (centro de massa, por exemplo). O problema da localização era, via de regra, resolvido pelos métodos das curvas e pontos característicos. Estes métodos não demandam virtualmente nenhum cálculo (a produção das curvas características demanda muito cálculo, mas estes precisam ser feitos somente uma vez) e funcionam muito bem em anomalias isoladas com alta razão sinal/ruído, características das anomalias vigentes no período, dada a baixa sensibilidade dos equipamentos geofísicos que só registravam anomalias muito fortes. Tanto o problema de detecção como de localização são bem-postos.

Segunda Fase: de fins da década de 40 a início da década de 60. Durante esta fase a base informativa é caracterizada por um aumento na quantidade de dados geofísicos devido ao sucesso da geofísica em várias áreas, e principalmente, por um aumento na qualidade dos dados devido à grande melhora na resolução e na sensibilidade dos equipamentos. Os dados geológicos também aumentam em quantidade e qualidade e passam a ser mais precisos

(determinação da composição químico-mineralógica e da idade das rochas, por exemplo). A base material continua sendo manual, embora tenha aumentado muito em número, deixando de ser restrita. A base metodológica responde às mudanças nas bases informativa e material. As anomalias dessa fase, em resposta à melhora nos instrumentos, passam a ser ruidosas e interferentes, forçando os geofísicos a criar novas metodologias de interpretação para tais anomalias. Assim, o grande problema geofísico dessa fase consistiu em decompor uma anomalia interferente nas suas componentes que eram por sua vez anomalias pouco ruidosas e isoladas. Desse modo, os mesmos métodos da primeira fase puderam ser aplicados separadamente às componentes de uma anomalia complexa. Consequentemente, ocorre nesta fase grande desenvolvimento de métodos de filtragem para eliminação de ruído (aplicação de filtros passa-baixa) e para acentuar componentes regionais (realçando baixos números de onda) ou residuais (realçando altos números de onda). Muitos dos métodos de filtragem envolvem a aplicação de operadores estáveis. Operadores instáveis (acentuação de componentes de altos números de onda) eram estabilizados com base na intuição e em testes empíricos. Desse modo, os problemas dessa fase continuam sendo predominantemente problemas bem-postos.

Terceira fase: do início da década de 60 a fins da década de 70. Durante esta fase a base informativa sofreu uma enorme mudança com o aparecimento de instrumentos bastante sensíveis, devido à evolução vertiginosa da eletrônica nesse período. O volume de dados geofísicos também aumentou bastante devido à disseminação dos levantamentos aerotransportados. Os dados geológicos também aumentaram bastante devido a programas de mapeamento sistemático (como o do Canadá, por exemplo). No entanto, foi a base material a maior responsável pelo aparecimento dessa fase. Com o advento dos computadores eletrônicos, os geofísicos puderam fazer experimentos antes nunca cogitados. Tornara-se possível, por exemplo, a formulação de problemas envolvendo a resolução de sistemas com mais de 50 incógnitas. Isto levou muitos intérpretes a tentar a delineação das fontes anômalas e a determinação da sua propriedade física. Em outras palavras, os geofísicos começaram nesta fase a tentar extrair mais informação do que aquela contida nos dados, levando ao aparecimento de problemas mal-postos, caracterizados principalmente por soluções instáveis na presença de ruído. Muitos geofísicos, ou por intuição ou por conservadorismo, mantiveram a demanda de informação compatível com a existente nos dados, estabelecendo modelos interpretativos simples. Outros, no entanto, introduziram modelos bastante complexos dando origem a métodos que só funcionavam em dados sintéticos sem ruído. Em dados com ruído esses métodos não produziam soluções únicas e estáveis. Assim, diversas análises de ambigüidade surgem nessa fase (Roy, 1962; Keilis-Borok e Yanovskaja, 1967; Al-chalabi, 1971). Essa situação semi-caótica levou a duas análises que nortearam o desenvolvimento posterior da interpretação geofísica: a análise de Backus e Gilbert (Backus e Gilbert, 1967, 1968) e a análise de Tikhonov (Tikhonov, 1963). Ambas concluíam que o problema geofísico inverso na sua forma mais ampla é um problema mal-posto. Elas diferiam, no entanto quanto ao remédio: Backus e Gilbert sugeriram que se deve reduzir a demanda de informação ao nível compatível com a

quantidade de informação existente nos dados, ou seja, extrair dos dados apenas o que eles podem oferecer. Tikhonov, por outro lado sugeriu a incorporação de informação a priori adicional para equilibrar o desbalanceamento oriundo da tentativa de se extrair uma quantidade de informação maior que aquela contida nos dados. Assim, a base metodológica desta fase é caracterizada pelo aparecimento de problemas mal-postos e pelo advento das análises de Backus e Gilbert e Tikhonov.

Os conceitos acima podem ser ilustrados com um exemplo simples. Seja o problema de determinar dois números N_1 e N_2 a partir da equação $N_1 + N_2 = 10$. Embora simples, esse exemplo não é muito diferente de um problema geofísico em sua essência: uma medida geofísica é uma combinação (linear ou não linear) de vários parâmetros, comumente propriedades físicas em células compondo uma malha discretizadora da subsuperfície. Como no problema geofísico inverso geral o número de observações geofísicas independentes (número de equações linearmente independentes) é, sempre menor que o número de parâmetros a serem determinados, podemos tomar o exemplo acima ($N_1 + N_2 = 10$) como um paradigma do problema geofísico inverso cuja solução não é única. Assim, seguindo a linha de Backus e Gilbert, para obtermos solução única, devemos reduzir a demanda de informação ao nível da informação contida nos dados. Uma possibilidade é, portanto, abrir mão de se determinarem N_1 e N_2 e determinar apenas a média dos dois números, o que seria obtida de modo único e estável através da equação acima, dividindo-se ambos os seus membros por dois. Por outro lado, se desejamos determinar N_1 e N_2 de modo único, não temos outra saída senão introduzir mais informação sobre tais incógnitas. Aqui vale ressaltar que essa introdução de informação não significa necessariamente especificar um dos números para determinar o outro. Basta introduzir propriedades ou características da solução (solução é aqui caracterizada por um par de números N_1 e N_2). Por exemplo, especificando que N_1 e N_2 são números naturais, reduzimos de infinitas soluções para apenas nove. Especificando além disso que N_1 é menor que N_2 , o número de soluções é reduzido para 4. Finalmente especificando que a solução deve conter um e apenas um número primo, chegamos a uma solução única: $N_1 = 1$ e $N_2 = 9$. Suponhamos que essa fosse realmente a solução verdadeira. Para ilustrar a importância de se introduzir uma informação a priori factual, basta notar que se as informações a priori introduzidas fossem: N_1 e N_2 são números naturais e N_1 está o mais próximo possível de N_2 , a solução também seria única, mas bem diferente da verdadeira, ou seja: $N_1 = 5$ e $N_2 = 5$. Na interpretação geofísica a incorporação de informação geológica a priori factual é igualmente importante de modo que a solução obtida seja não somente única e estável, mas faça também sentido geológico.

Ao final da terceira fase, notam-se tentativas acanhadas de estabilização usando-se, no entanto, informações adicionais puramente matemáticas. A necessidade de estabilizações que incorporam informação geológica *de fato* forneceu a base para o aparecimento da próxima fase.

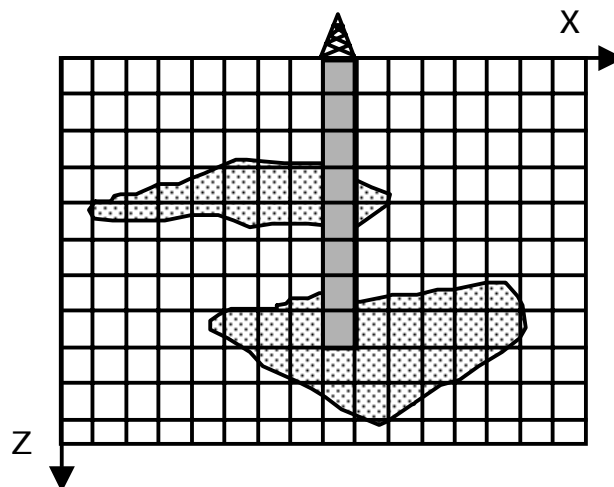
Quarta fase: a partir da década de 80 até a atualidade. Nesta fase a base informativa sofreu mais uma enorme evolução com a incorporação na instrumentação geofísica dos vertiginosos avanços da eletrônica, com especial destaque ao advento do GPS e à possibilidade de se medirem os gradientes das

entidades físicas (campos), o que só foi possível com o aparecimento de instrumentos super sensíveis e de instrumentos precisos de localização como o GPS. A base material melhorou consideravelmente no que se refere ao tempo computacional e memória. Particularmente, o advento de computadores pessoais deu maior liberdade aos geofísicos que trabalhavam no desenvolvimento de novos métodos de interpretação. O vertiginoso desenvolvimento dos computadores nesta fase também contribuiu para a melhora da base informativa, permitindo a incorporação de microprocessadores nos instrumentos que, além de medir, armazenam e processam os dados coletados. A base metodológica é caracterizada pelo desenvolvimento de métodos para interpretação de dados de alta resolução, de dados de gradiente e, principalmente de métodos que incorporam informações geológicas específicas.

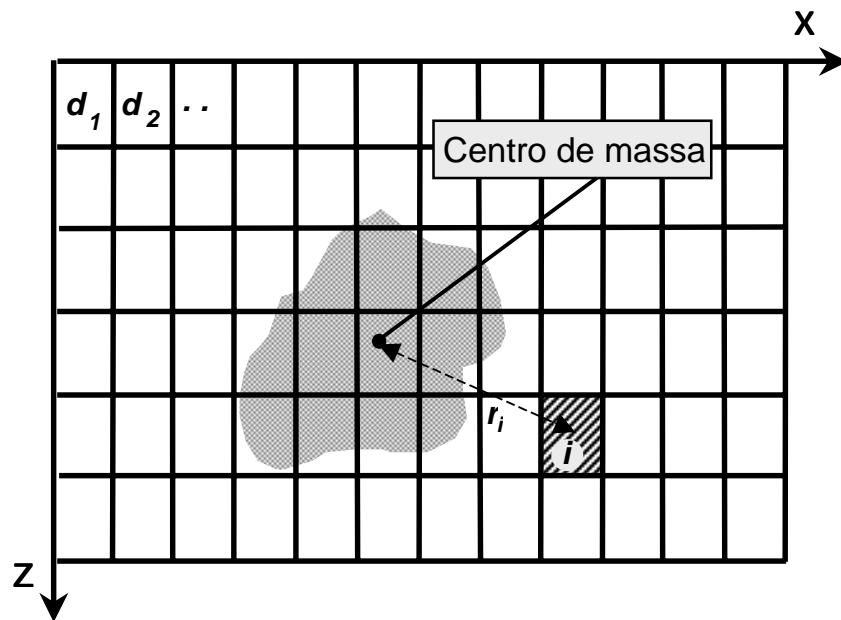
A seguir, listaremos os tipos de vínculos matemáticos disponíveis atualmente como estabilizadores do problema geofísico inverso e sua relação com o ambiente geológico.

Vínculo de desigualdade: consiste em estabelecer limites superiores e/ou limites inferiores para a estimativa de cada parâmetro. **Isoladamente**, este vínculo matemático não estabiliza as soluções nem está associado com nenhuma informação geológica relevante. Combinado com outros vínculos matemáticos, pode introduzir importantes informações sobre alguns tipos de ambiente geológico como será ilustrado durante o curso. É introduzido no problema geofísico inverso através de programação linear ou quadrática.

Vínculo de igualdade absoluta: consiste em impor que os valores das estimativas de certos parâmetros estejam o mais perto possível de valores conhecidos. Por exemplo, um furo de sondagem produz medidas da propriedade física ao longo de sua extensão como ilustrado na Figura abaixo. Este vínculo é introduzido forçando-se os valores da propriedade física a serem estimadas nas células atravessadas (em cinza na Figura) a permanecerem tão próximos quanto possível dos valores medidos da propriedades física.

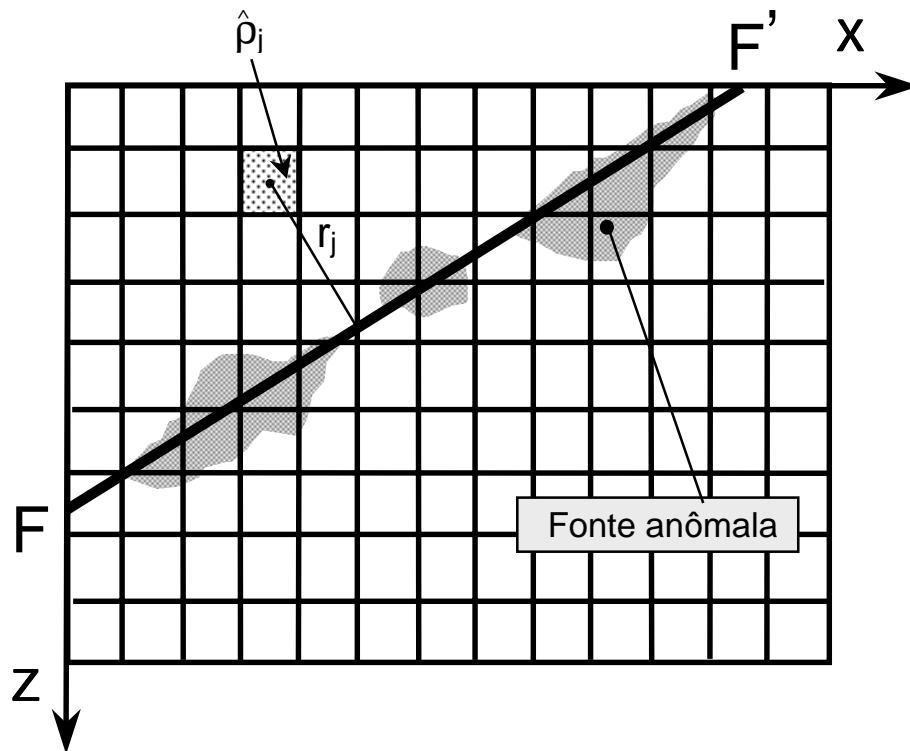


Vínculo de compacidade: consiste em impor que os valores das estimativas dos parâmetros estejam próximos a dois extremos. Quando os parâmetros são contrastes de propriedade física, o extremo inferior é zero e o extremo superior é o valor esperado a priori para o contraste de propriedade física $\Delta\mu$, presumivelmente homogêneo e conhecido. Assim, quando aplicado ao problema de estimar os contrastes de propriedade física nas células elementares de uma malha (V. Figura abaixo), as estimativas serão ou próximas de zero (região onde não há fonte) ou próximas de $\Delta\mu$. Este tipo de vínculo é introduzido ponderando-se a estimativa do contraste numa célula por um fator proporcional à distância r_i entre o centro de massa da fonte (presumivelmente conhecido) e o centro da célula. Assim, células afastadas do centro de massa tenderão a produzir estimativas nulas do contraste ao passo que células próximas tenderão a produzir estimativas próximas a $\Delta\mu$. Por exemplo, ao interpretar uma anomalia produzida por estruturas relacionadas a intrusões de rochas ígneas, o intérprete pode ter uma razoável confiança que a fonte seja compacta e aproximadamente homogênea, de modo que esse tipo de vínculo é, nesse caso, pertinente e contribui para uma interpretação condizente com o ambiente geológico conhecido.

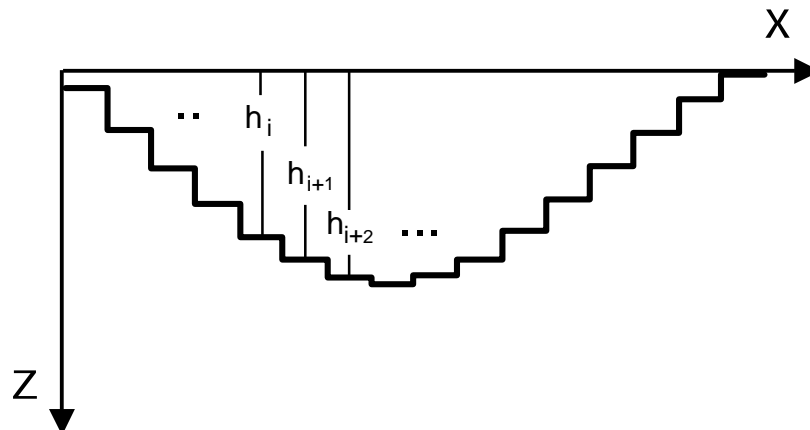


Vínculo de mínimo momento de inércia: semelhante ao vínculo de compacidade, com a diferença que a ponderação das estimativas em cada célula é feita em relação a um eixo (cuja posição é conhecida a priori) e não ao centro de massa. Assim, células afastadas do eixo de massa tenderão a produzir estimativas nulas do contraste de propriedade física ao passo que células próximas ao eixo tenderão a produzir estimativas próximas a $\Delta\mu$. Por exemplo, ao interpretar uma anomalia produzida por estruturas relacionadas a intrusões de rochas ígneas ou mineralizações o intérprete pode ter uma razoável confiança

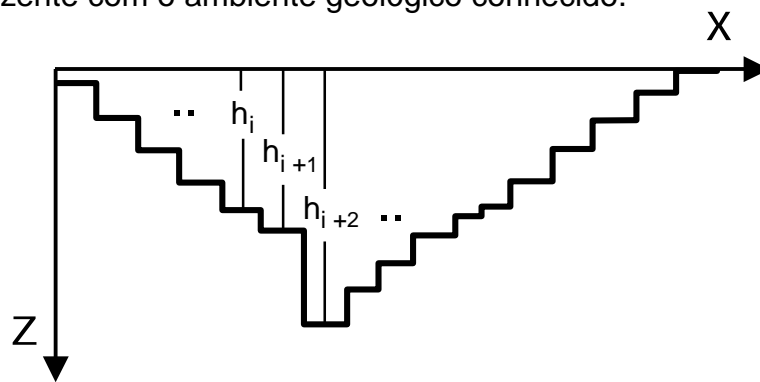
que a fonte, além de compacta e homogênea (e cujo contraste de propriedade física é conhecido), concentra-se ao longo de uma direção conhecida: uma falha no caso de mineralizações ou regiões de fraqueza no caso de lacólitos ou soleiras, de modo que esse tipo de vínculo é, nesse caso, pertinente e contribui para uma interpretação condizente com o ambiente geológico conhecido.



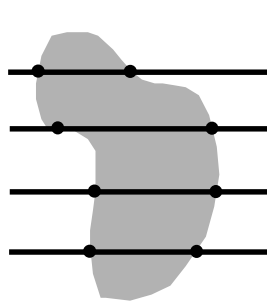
Vínculo de igualdade relativa: consiste em impor que os valores das estimativas de parâmetros espacialmente contíguos estejam o mais próximo possível entre si. Por exemplo, ao interpretar o relevo do embasamento de uma bacia intracratônica, o intérprete pode ter informação que esse relevo é suave. Assim, a introdução do vínculo que as estimativas das espessuras do pacote sedimentar em pontos contíguos sejam próximas entre si ($h_i \approx h_{i+1} \approx h_{i+2}$ na Figura abaixo) é, nesse caso, pertinente e contribui para uma interpretação condizente com o ambiente geológico conhecido.



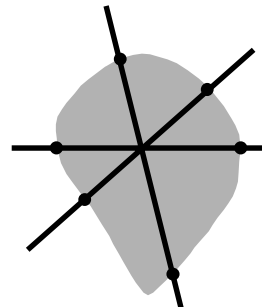
Vínculo de igualdade relativa ponderada: consiste em impor que os valores das estimativas de **alguns** parâmetros espacialmente contíguos estejam o mais próximo possível entre si (h_i e h_{i+1} na Figura abaixo) , ao passo que as estimativas de outros grupos de parâmetros contíguos possam ser muito diferentes entre si (h_{i+1} e h_{i+2} na Figura abaixo). Isso é conseguido ponderando-se os vínculos de igualdade aproximada entre parâmetros contíguos. Pesos altos levam a maior proximidade entre as estimativas dos parâmetros e vice-versa. Por exemplo, ao interpretar o relevo do embasamento de uma bacia costeira, em que a evolução da bacia se deu principalmente por falhas normais, presume-se que o intérprete tenha a informação que o relevo pode ser abrupto em pontos localizados. Assim, a introdução do vínculo de que as estimativas das espessuras do pacote sedimentar em pontos contíguos (h_{i+1} e h_{i+2} na Figura abaixo) possam ser muito diferentes entre si é, nesse caso, pertinente e contribui para uma interpretação condizente com o ambiente geológico conhecido.



Vínculo de convexidade: consiste em impor que a fonte estimada tenha um contorno convexo. Isto é conseguido minimizando-se o número de pontos de interseção entre as bordas do modelo interpretativo e um feixe de retas com direção e espaçamento pré-estabelecidos. Se as retas tiverem uma única direção, falamos em “convexidade direcional”. Por outro lado, se as retas varrerem aproximadamente todas as direções espaciais, falamos em “convexidade global” (V. Figura abaixo). Assim, se o intérprete tem informação que o corpo anômalo é um diápiro que se formou através de uma ascensão através de rochas circunjacentes isotrópicas a sua forma lembrará uma gota invertida (convexa), de modo que esse tipo de vínculo é, nesse caso, pertinente e contribui para uma interpretação condizente com o ambiente geológico conhecido.



Convexidade direcional



Convexidade global

Em resumo: O problema geofísico inverso é mal-posto porque os geofísicos tentam extrair mais informação que aquela contida nos dados. Como consequência, num problema mal-posto a solução ou não existe, ou não é única ou não é estável. Há somente duas abordagens efetivas de se transformar um problema mal-posto num problema bem-posto: reduzir a demanda de informação ou introduzir informação a priori. Na Geofísica, o problema inverso vem sendo transformado em um problema bem-posto através de estabilizadores puramente matemáticos. Estes estabilizadores, no entanto estão introduzindo, implicitamente, alguma forma de informação a priori, que muitas vezes não é reconhecida pelos autores e intérpretes. Os objetivos desse curso são:

a) mostrar que os diversos estabilizadores matemáticos podem ser analisados em termos da informação geológica que eles implicitamente introduzem;

b) mostrar que, dado um ambiente geológico, deve-se escolher o estabilizador matemático que introduza a informação a priori mais adequada ao ambiente geológico, caso contrário, a solução será única, estável, mas não fará sentido geológico.

REFERÊNCIAS

- Al-Chalabi, M., 1971, Some studies relating to nonuniqueness in gravity and magnetic inverse problems: *Geophysics*, **36**, 835-855.
- Backus, G. E., and Gilbert, F., 1967, Numerical application of a formalism for geophysical inverse problems: *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **13**, 247-276.
- Backus, G. E., and Gilbert, F., 1968, The resolving power of gross Earth data: *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **16**, 169-205.
- Hadamard, J., 1902, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique: *Bull Princeton Univ.*, **13**, 1-20.
- Keilis-Borok, V. I., and Yanovskaja, T. B., 1967, Inverse problems of seismology (structural review): *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **13**, 223-234.
- Roy, A., 1962, Ambiguity in geophysical interpretation: *Geophysics*, **27**, 90-99.
- Tikhonov, A. N., 1963, Regularization of ill-posed problems: *Doklady Akad. Nauk, SSSR*, **153**, 49-52.