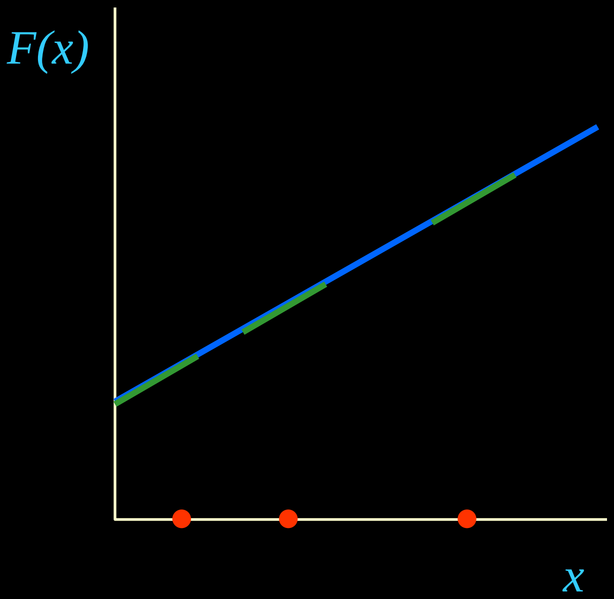
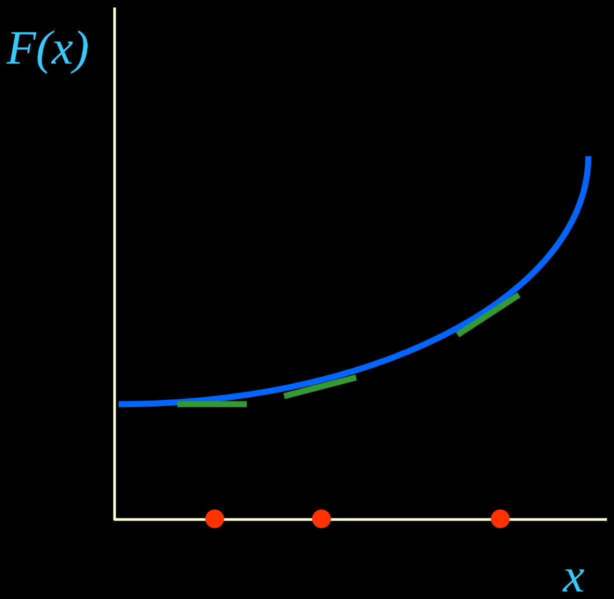
O problema não linear

Função linear



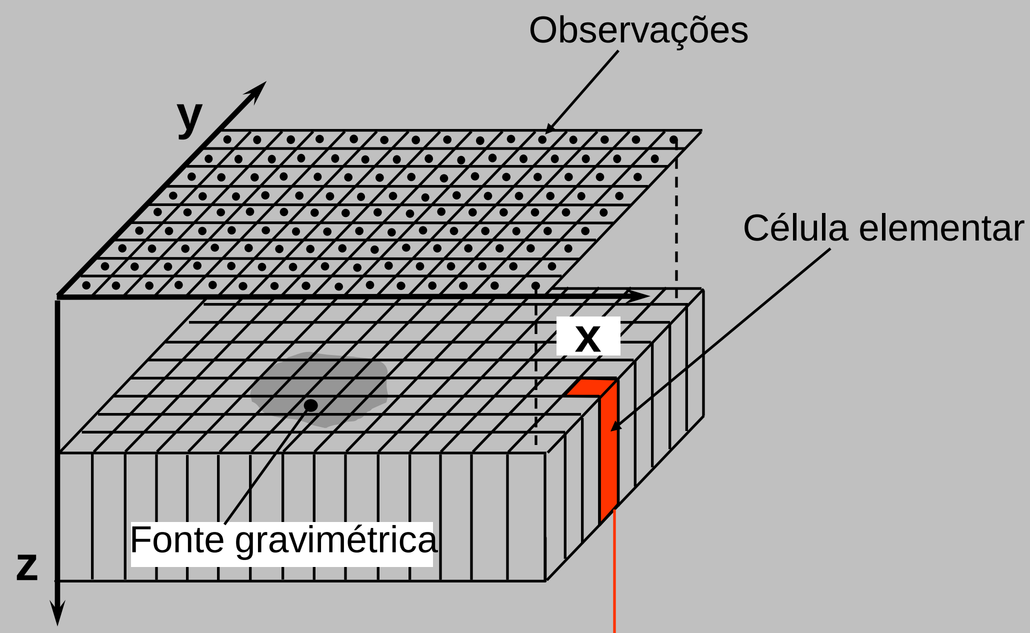
$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \text{constante}$$

Função não linear



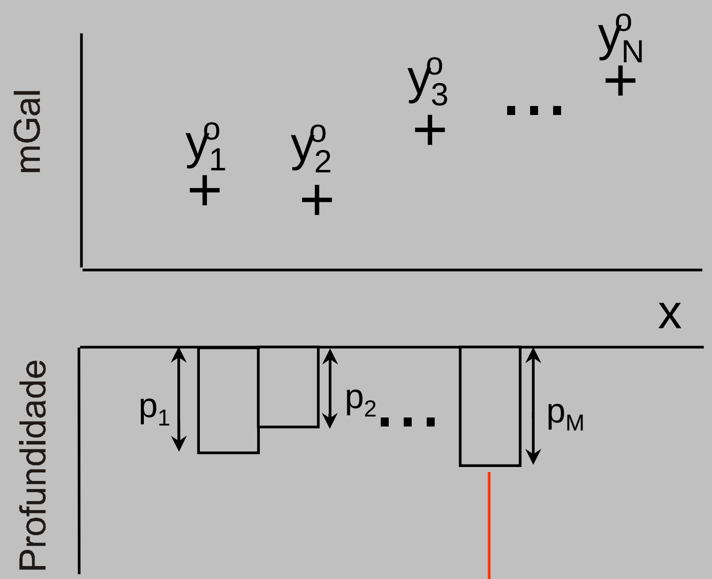
$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x)$$

Problema linear



$$g_i = \gamma \sum_j p_j \int_{x_i-a}^{x_i+a} \int_{y_i-b}^{y_i+b} \int_{h_t}^{h_b} \frac{z - z'}{\left[\left(x_i - x'_j\right)^2 + \left(y_i - y'_j\right)^2 + \left(z_i - z'_j\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx'_j \, dy'_j \, dz'_j$$

Problema não linear



$$g_i = \gamma \sum_j d_j \int_{xo_j - a}^{xo_j + a} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{p_j} \frac{z - z'}{\left[\left(x_i - x'_j \right)^2 + \left(y_c - y'_j \right)^2 + \left(z_i - z'_j \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dx'_j \, dy'_j \, dz'_j$$

Problema linear:

$$\mathbf{A}\, p = \mathbf{y^o}$$

Para garantir existência de uma solução,
minimiza-se a forma quadrática:

$$(y^o - Ap)^T\,(y^o - Ap)$$

tomando-se o gradiente em relação a **p** e igualando ao vetor nulo,
o que leva à equação linear:

$$A^T A\, p = A^T y^o$$

Problema não linear:

$$\mathbf{A}\,(p)\,p = \mathbf{y^o}$$

Para garantir existência de uma solução,
minimiza-se a forma contendo derivadas de ordem arbitrária:

$$[y^o - f\,(p)\,]^T\,[y^o - f\,(p)]$$

que, mesmo após tomar o gradiente,
não leva a uma equação linear:

Desse modo, não há uma expressão explícita para o estimador de **p**:

Analogia com uma equação escalar:

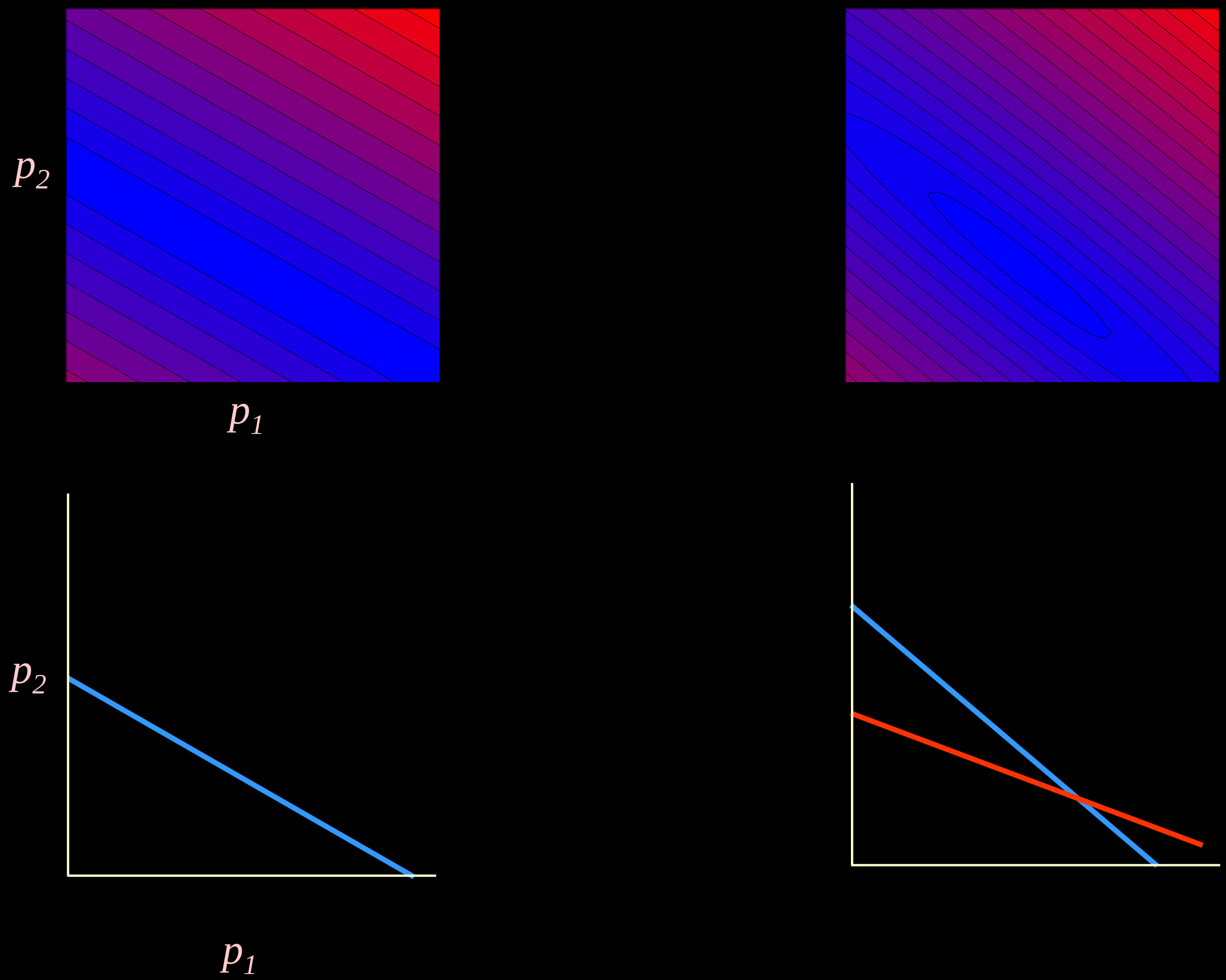
$$a\,x = b$$

$$x = a^{-1}\,b$$

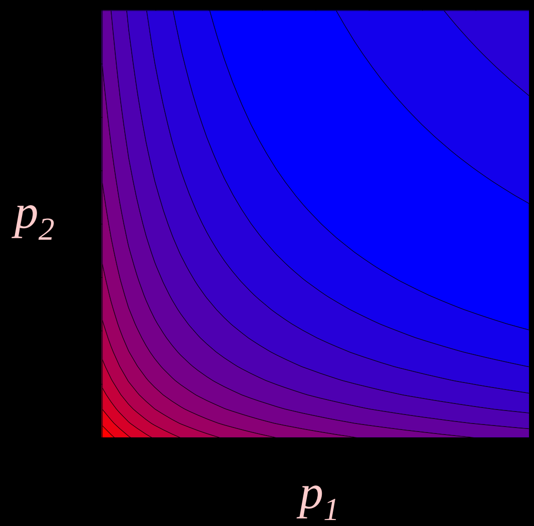
$$a\,x^{8} + b\log(x) + c\,e^{\sin(x)} = d$$

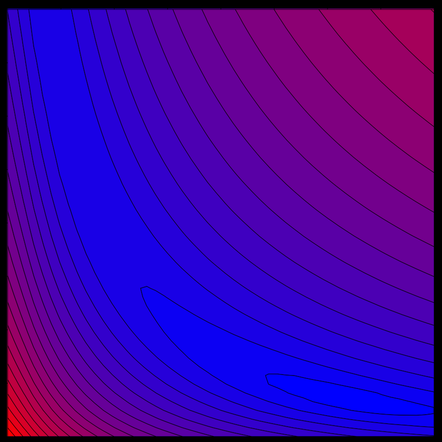
$$\cancel{x=}$$

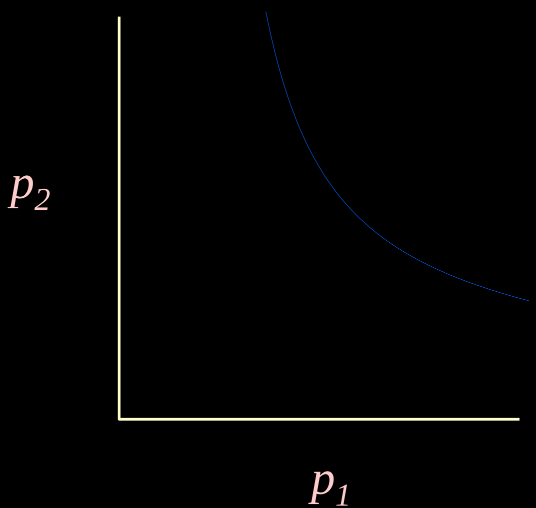
Problema linear

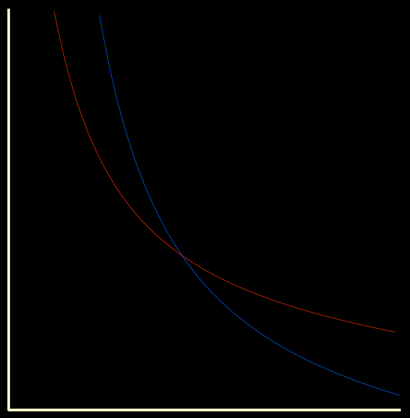


Problema não linear

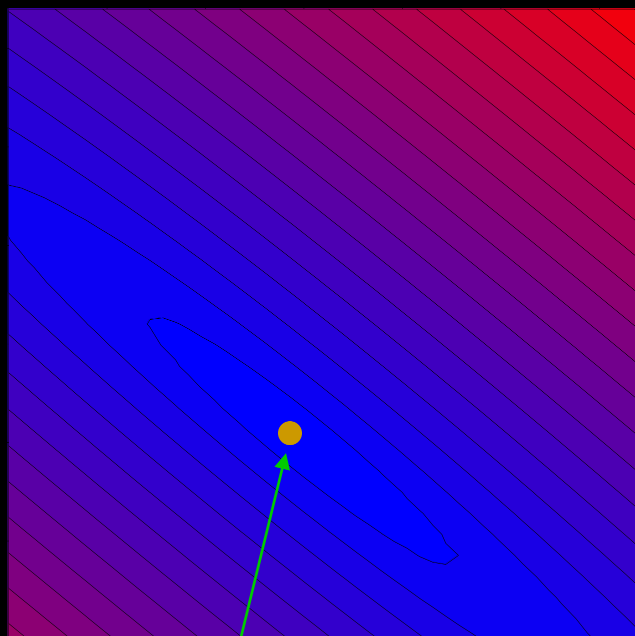






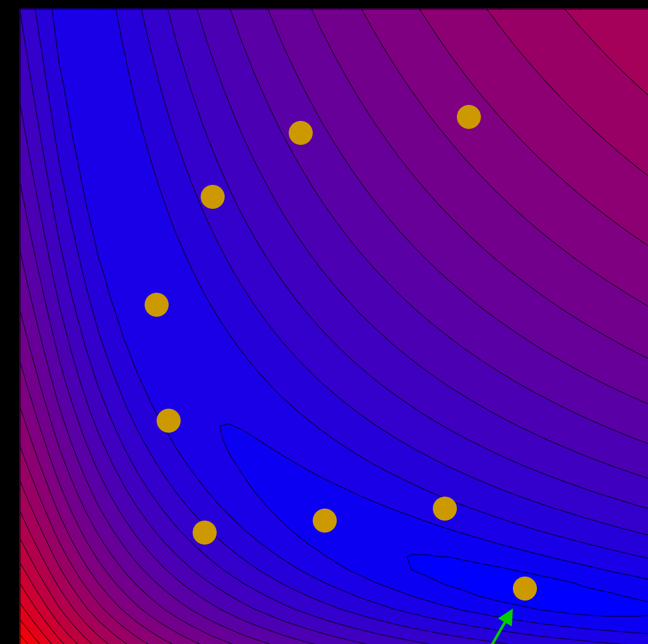


Linear



Solução analítica

Não linear



Solução por iteração

Incorporação de informação a priori

Problema linear

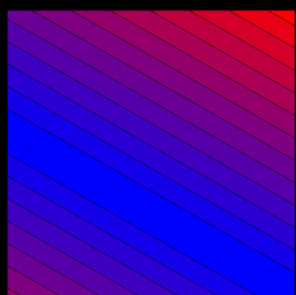
$$(\mathbf{y}^o - \mathbf{Ap})^T (\mathbf{y}^o - \mathbf{Ap}) + \boxed{\mu \,.\, \Phi(\mathbf{p})} = \tau$$

Problema não linear

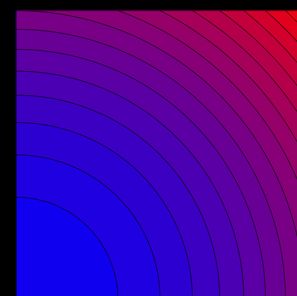
$$[\mathbf{y}^o - f\,(\mathbf{p})]^T [\mathbf{y}^o - f\,(\mathbf{p})] + \boxed{\mu \,.\, \Phi(\mathbf{p})} = \tau$$

Incorporação de informação a priori

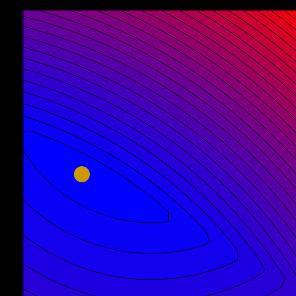
Problema linear



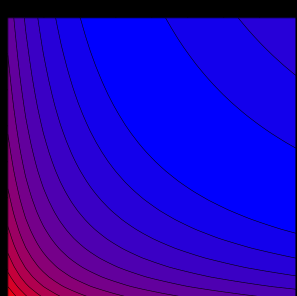
$+$ μ .



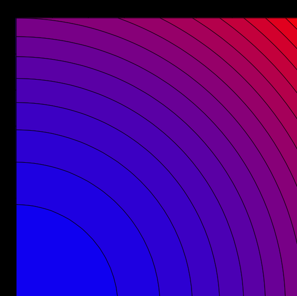
$=$



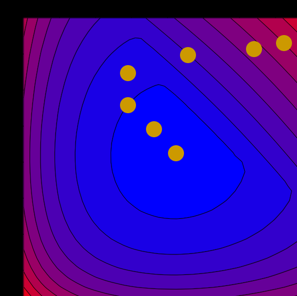
Problema não linear



$+$ μ .



$=$



Incorporação de informação a priori

Problema linear

$\min \quad \Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{W}\mathbf{p}$

sujeito a

$(\mathbf{y}^o - \mathbf{A}\mathbf{p})^T (\mathbf{y}^o - \mathbf{A}\mathbf{p}) = \delta$

Forma explícita:

$p = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu\mathbf{W})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}^o$

Problema não linear

$\min \quad \Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{W}\mathbf{p}$

sujeito a

$[\mathbf{y}^o - f(\mathbf{p})]^T [\mathbf{y}^o - f(\mathbf{p})] = \delta$

Forma explícita:

?

Problema linear

$\min \quad \Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{W}\mathbf{p}$

sujeito a

$(\mathbf{y}^o-\mathbf{A}\mathbf{p})^T(\mathbf{y}^o-\mathbf{A}\mathbf{p})=\delta$

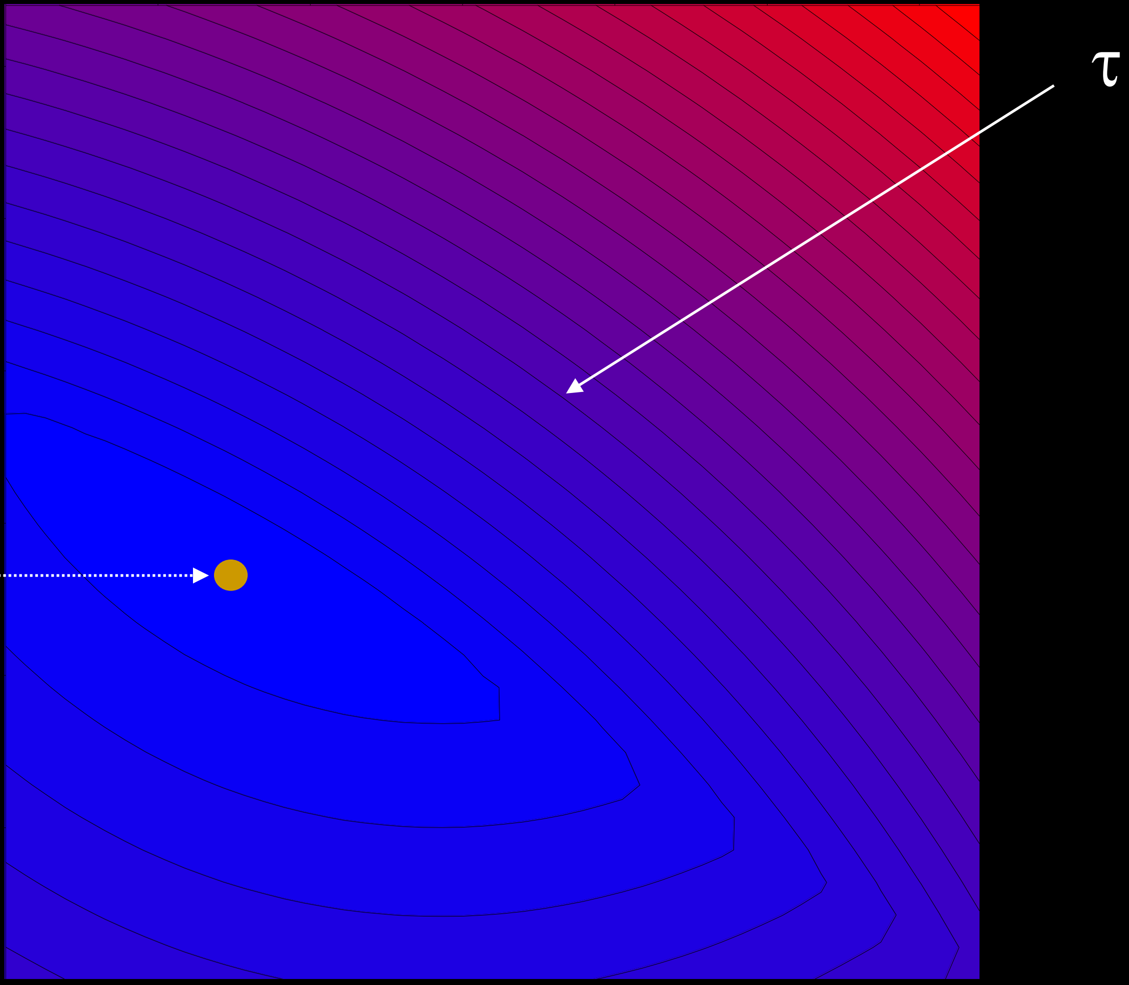
$\min \quad \tau = (\mathbf{y}^o-\mathbf{A}\mathbf{p})^T(\mathbf{y}^o-\mathbf{A}\mathbf{p}) + \mu\, \mathbf{p}^T\mathbf{W}\mathbf{p}$

$\boxed{-\mathbf{A}^T}(\mathbf{y}^o-\mathbf{A}\mathbf{p}) + \mu\, \mathbf{W}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad -\mathbf{A}^T\mathbf{y}^o + \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{p} + \mu\, \mathbf{W}\mathbf{p} = \mathbf{0}$

$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu\, \mathbf{W})\,\mathbf{p} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}^o$

$$\boxed{\mathbf{p} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu\, \mathbf{W})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}^o}$$

$$p = (A^T A + \mu W)^{-1} A^T y^o$$



Problema não linear

$\min \quad \Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{W}\mathbf{p}$

sujeito a

$[\mathbf{y}^o - \boldsymbol{f}\,(\mathbf{p})]^T\,[\mathbf{y}^o - \boldsymbol{f}\,(\mathbf{p})] = \delta$

$\min \quad \tau = [\mathbf{y}^o - \boldsymbol{f}\,(\mathbf{p})]^T\,[\mathbf{y}^o - \boldsymbol{f}\,(\mathbf{p})] + \mu\,\mathbf{p}^T\mathbf{W}\mathbf{p}$

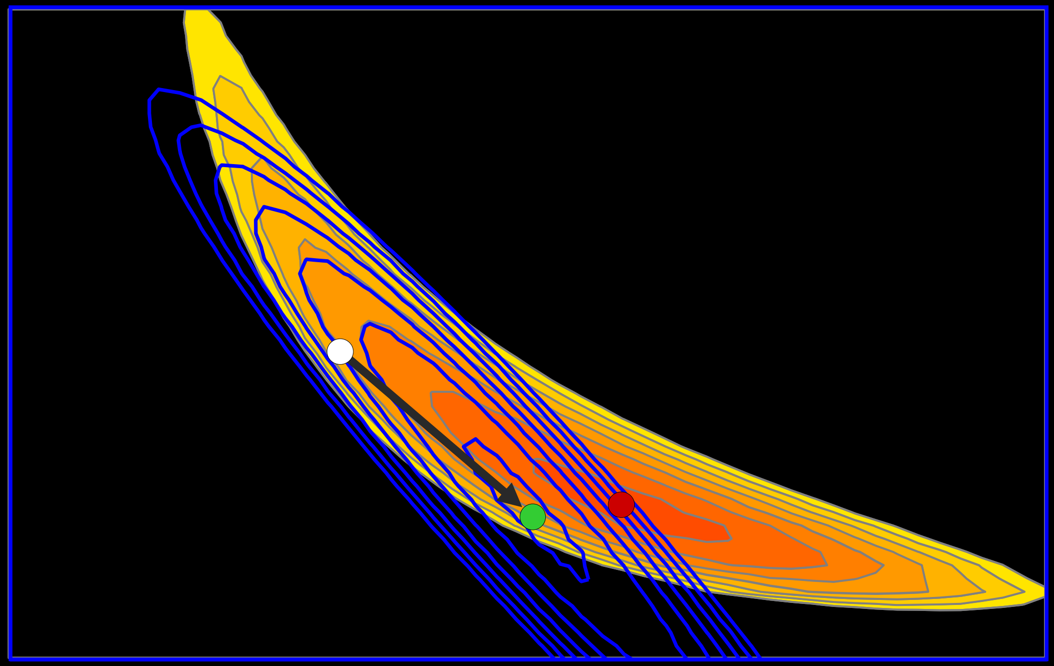
Metodologia: encontrar uma estratégia de descida para o mínimo de τ

Principais estratégias

Métodos de busca
- Nelder-Mead
- Simulated annealing
- Algoritmos genéticos

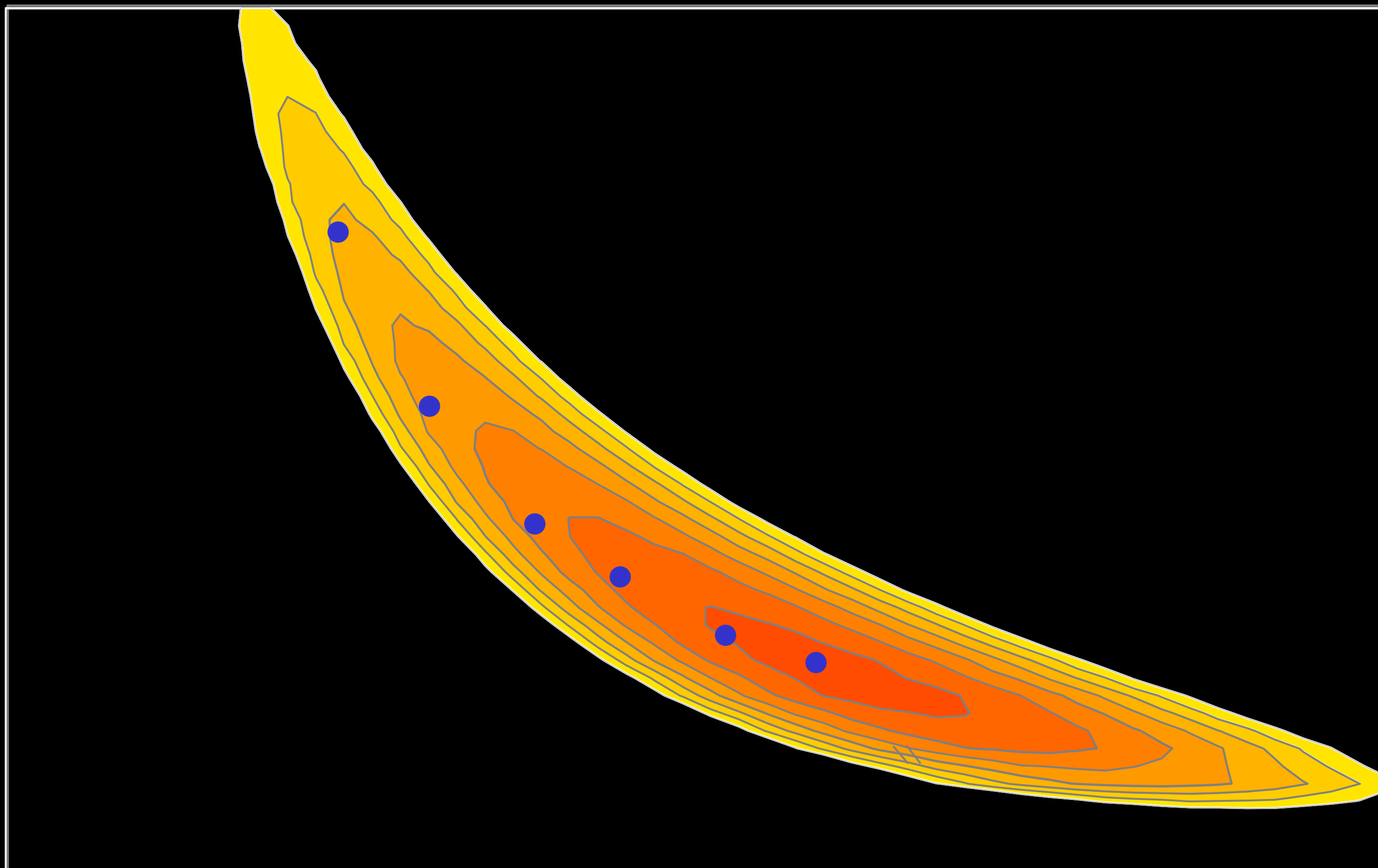
Métodos de gradiente
- Máxima declividade
- Newton / Gauss-Newton
- Marquardt

Estratégia de Newton

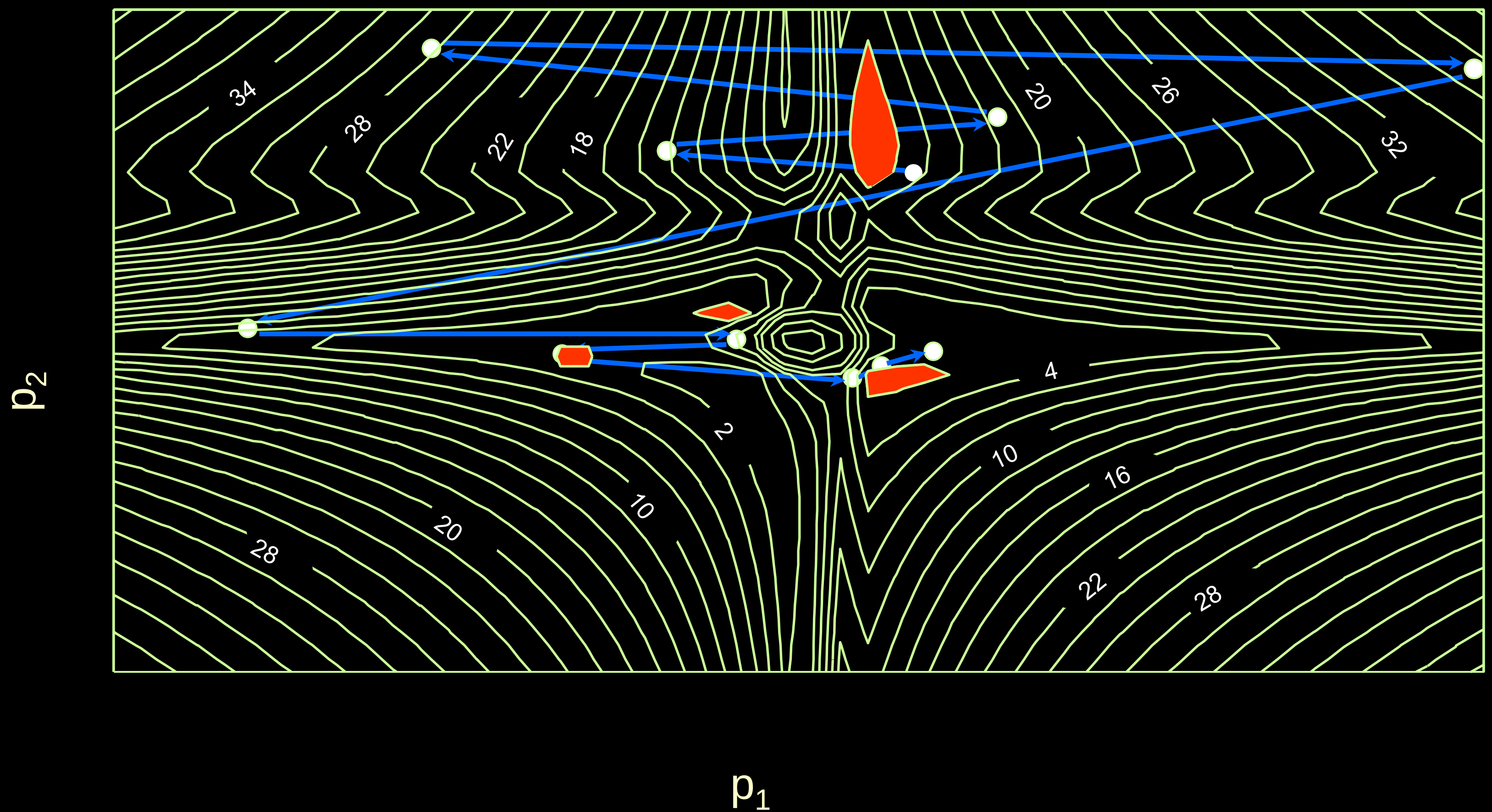


$\Psi(\mathbf{p}) + \mu\ \Phi(\mathbf{p}) = \tau$

$[\ \Psi'' + \mu\ \Phi''\ ]\ (p - p_o) = -\ [\ \Psi' + \mu\ \Phi'\ ]$



Instabilidade do método de Newton



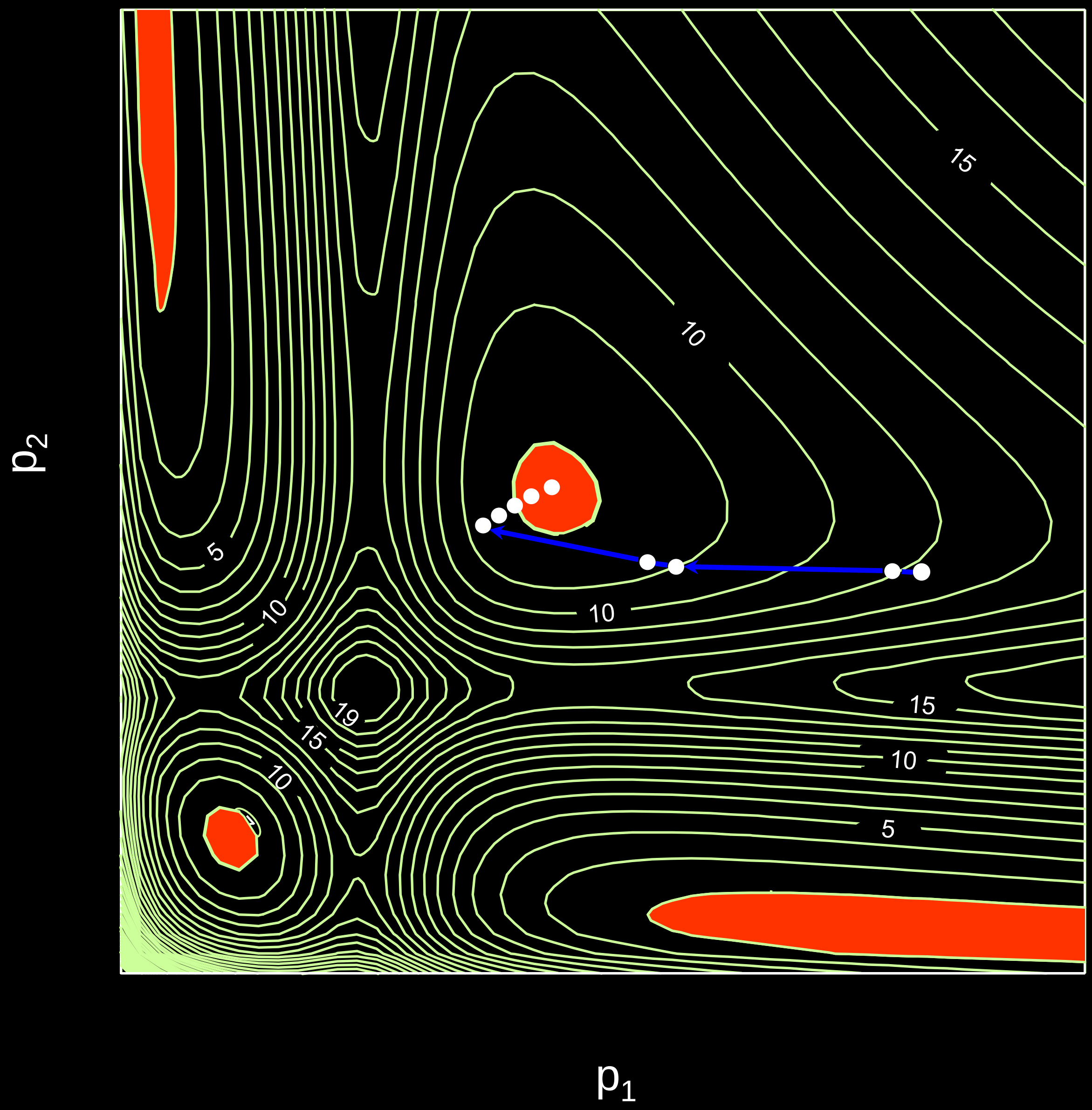
Estratégia de Marquardt

Newton: $[\,\Psi'' + \mu\,\Phi''\,]\,(p-p_o) = -\,[\,\Psi' + \mu\,\Phi'\,]$

Marquardt: $[\,\Psi'' + \mu\,\Phi'' + \lambda\,\mathbf{I}\,]\,(p-p_o) = -\,[\,\Psi' + \mu\,\Phi'\,]$

O parâmetro λ estabiliza o passo do processo iterativo

Estabilidade do método de Marquardt



Confusão entre: multiplicador de Lagrange e parâmetro de Marquardt

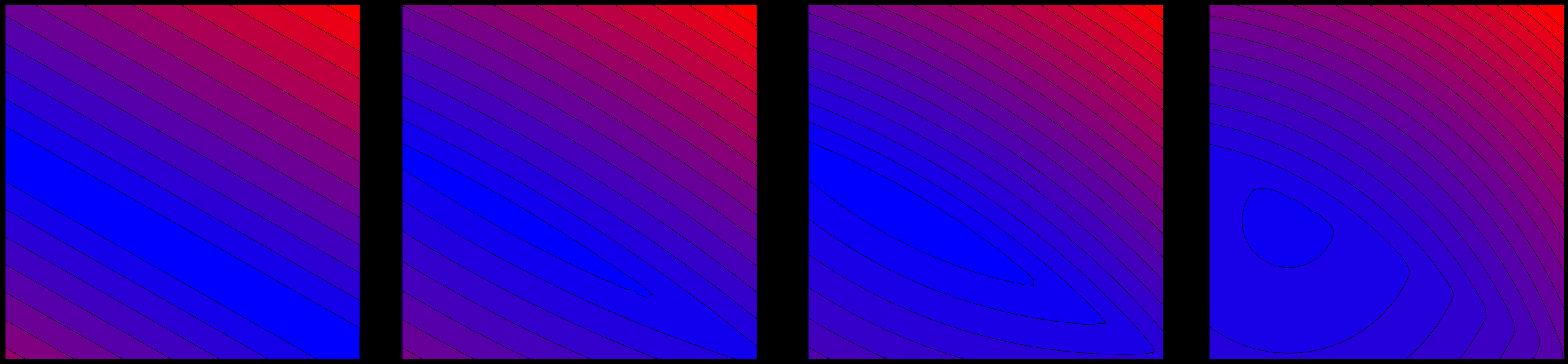
Problema linear estabilizado pela norma euclideana (Ridge regression):

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}^o$$

Problema não linear não estabilizado (passo de Gauss-Newton):

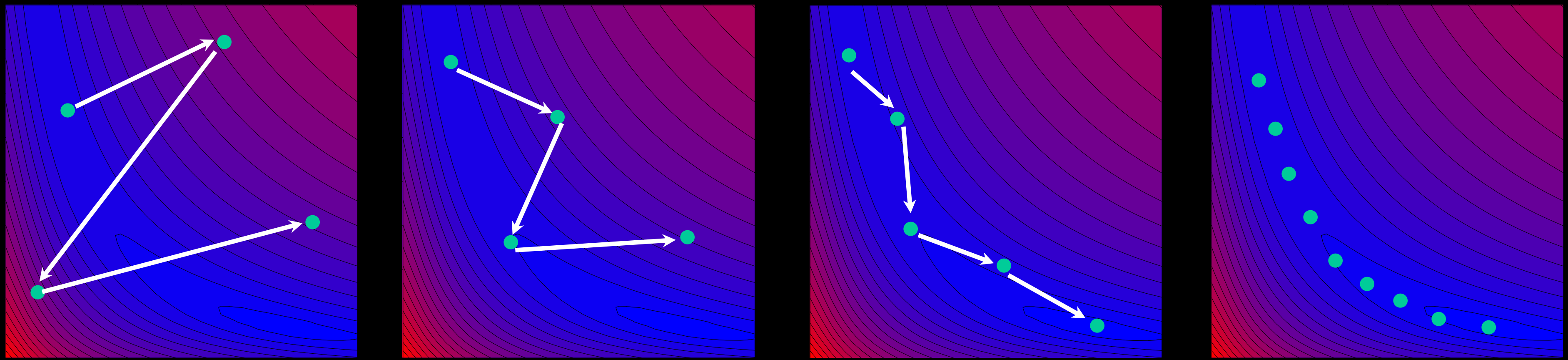
$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{y}$$

Problema linear ou não linear



Multiplicador de Lagrange

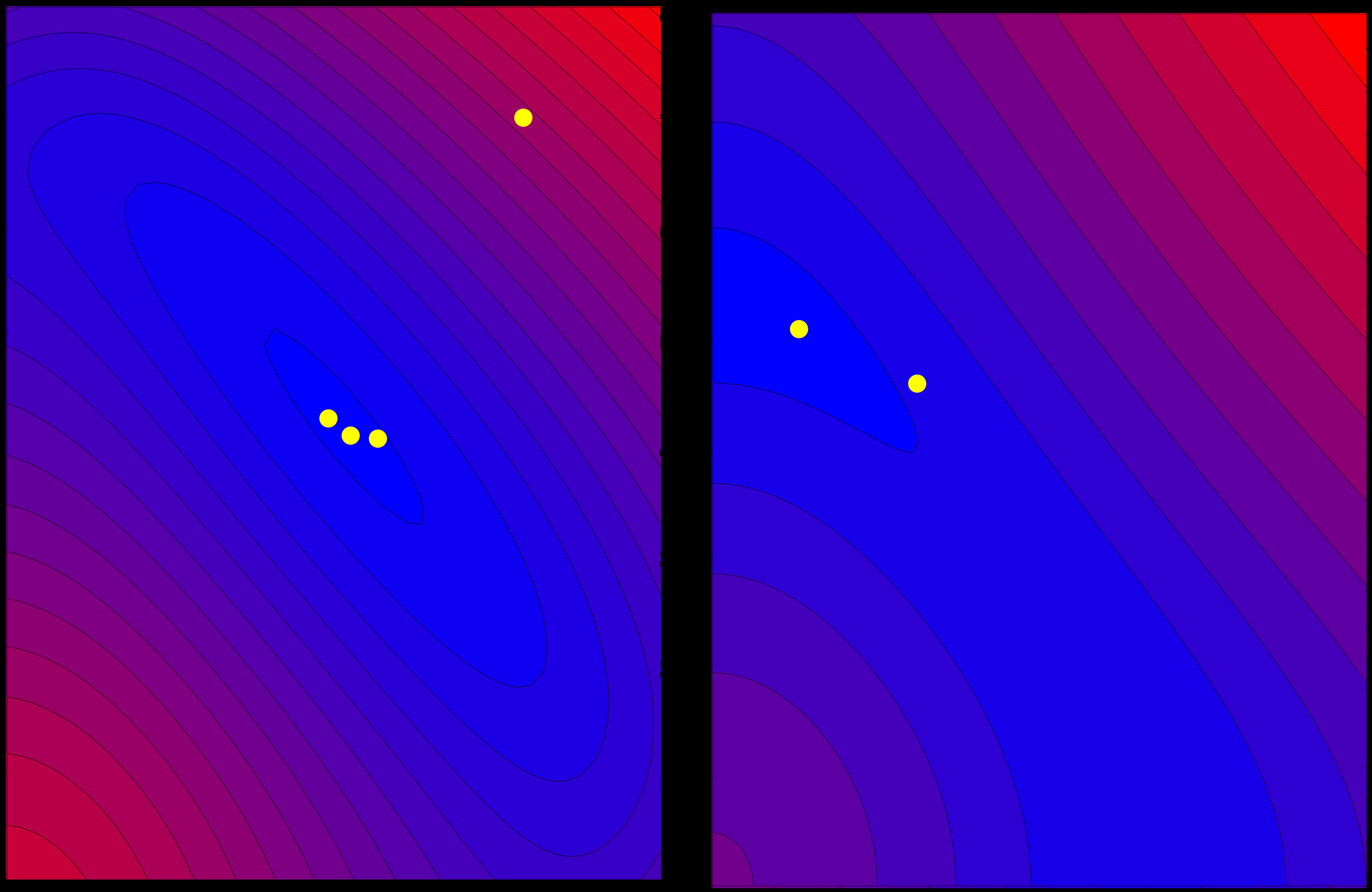
Problema não linear



Parâmetro de Marquardt

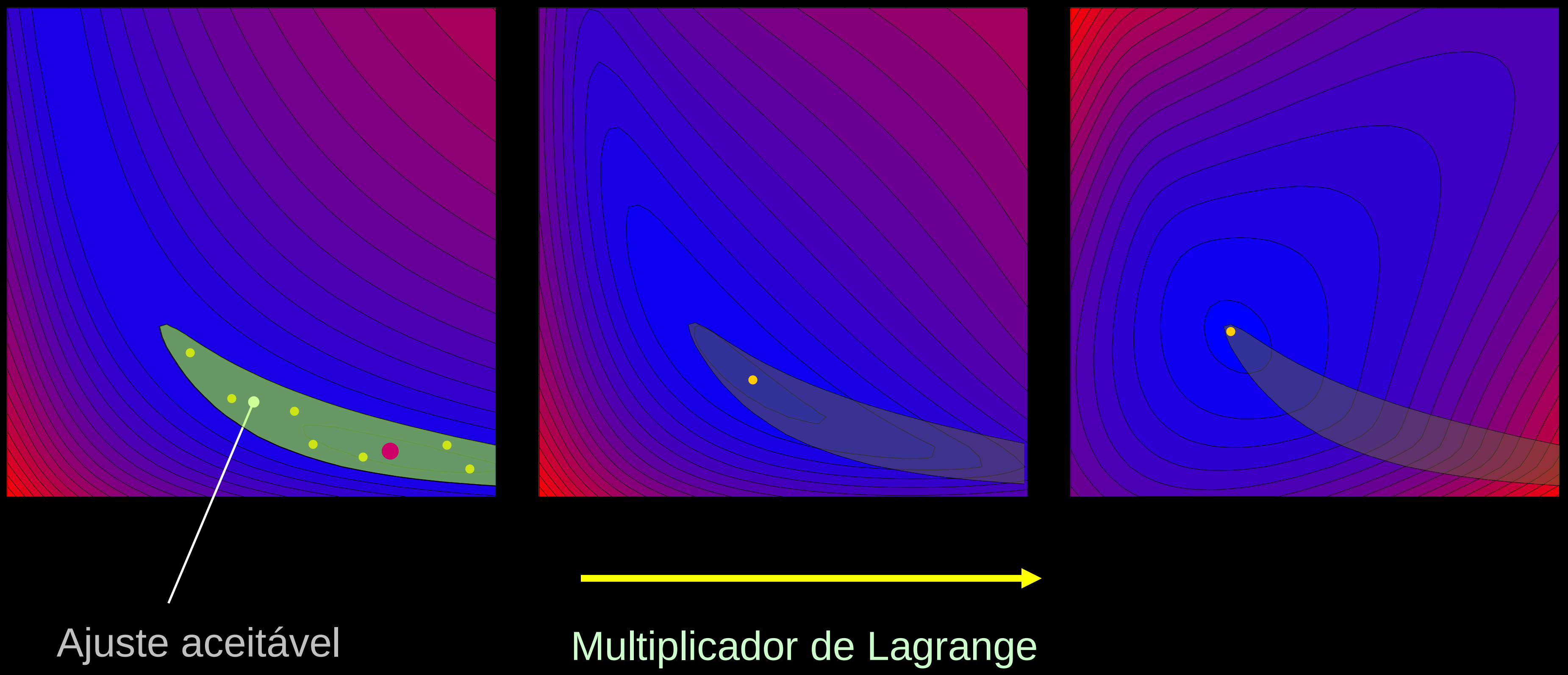
A confusão entre multiplicador de Lagrange e parâmetro de Marquardt pode levar o intérprete desavisado a uma perigosa cilada:

Usar somente o parâmetro de Marquardt com duplo papel de estabilizar o passo e os parâmetros diminuindo-o ao longo das iterações



Outras três ciladas comuns no problema não linear são:

- Estimar o multiplicador de Lagrange como o maior valor positivo ainda produzindo ajustes aceitáveis aos dados geofísicos
- Interromper o processo iterativo quando é encontrada uma solução produzindo ajustes aceitáveis aos dados geofísicos
- Usar a técnica conhecida como “Jumping”

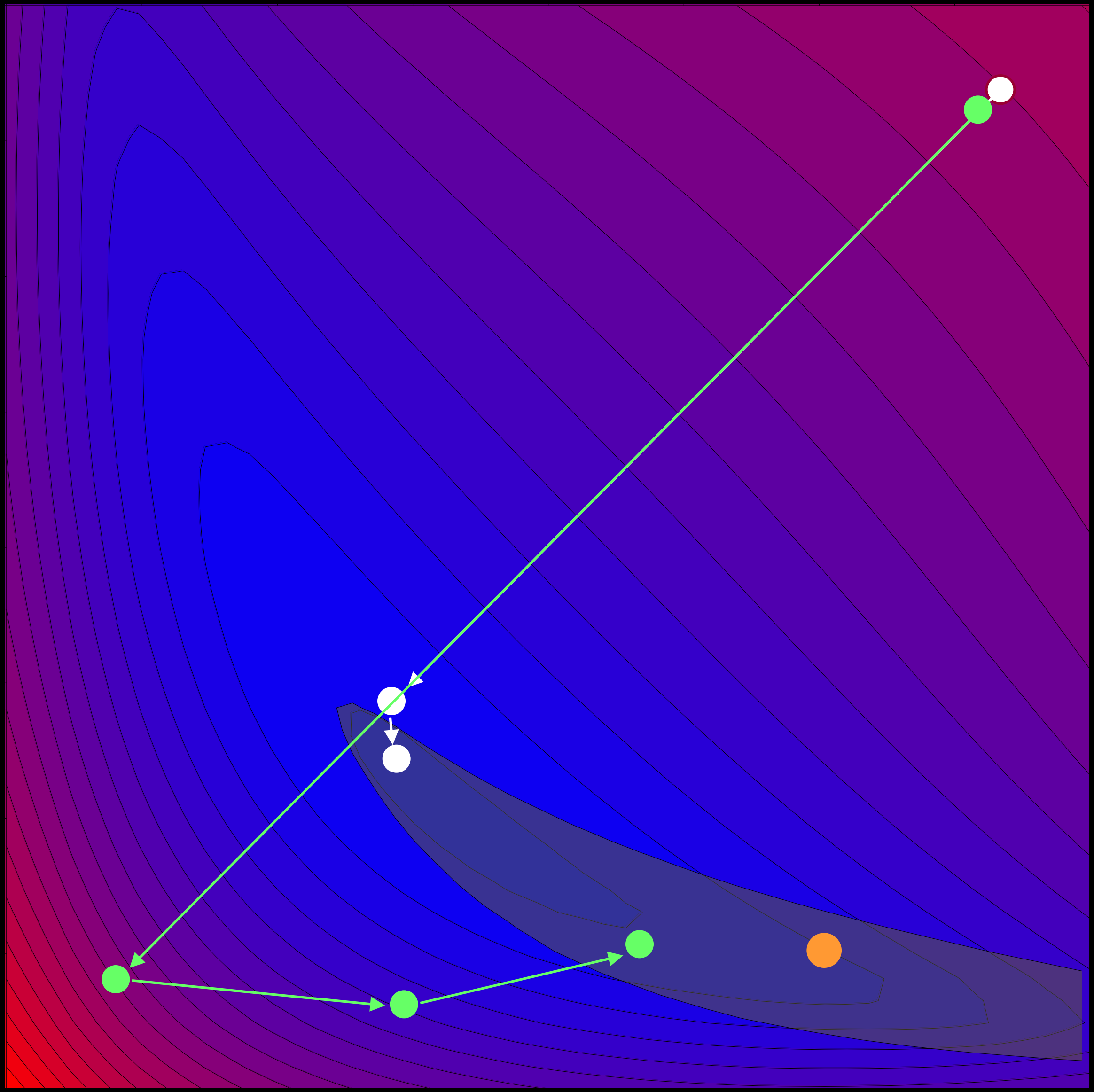

Ajuste aceitável
Multiplicador de Lagrange

Ciladas no problema não linear

- Estimar o multiplicador de Lagrange como o maior valor positivo ainda produzindo ajustes aceitáveis aos dados geofísicos

- Interromper o processo iterativo quando é encontrada uma solução produzindo ajustes aceitáveis aos dados geofísicos

- Usar a técnica conhecida como “Jumping”



Ciladas no problema não linear

- Estimar o multiplicador de Lagrange como o maior valor positivo ainda produzindo ajustes aceitáveis aos dados geofísicos

- Interromper o processo iterativo quando é encontrada uma solução produzindo ajustes aceitáveis aos dados geofísicos

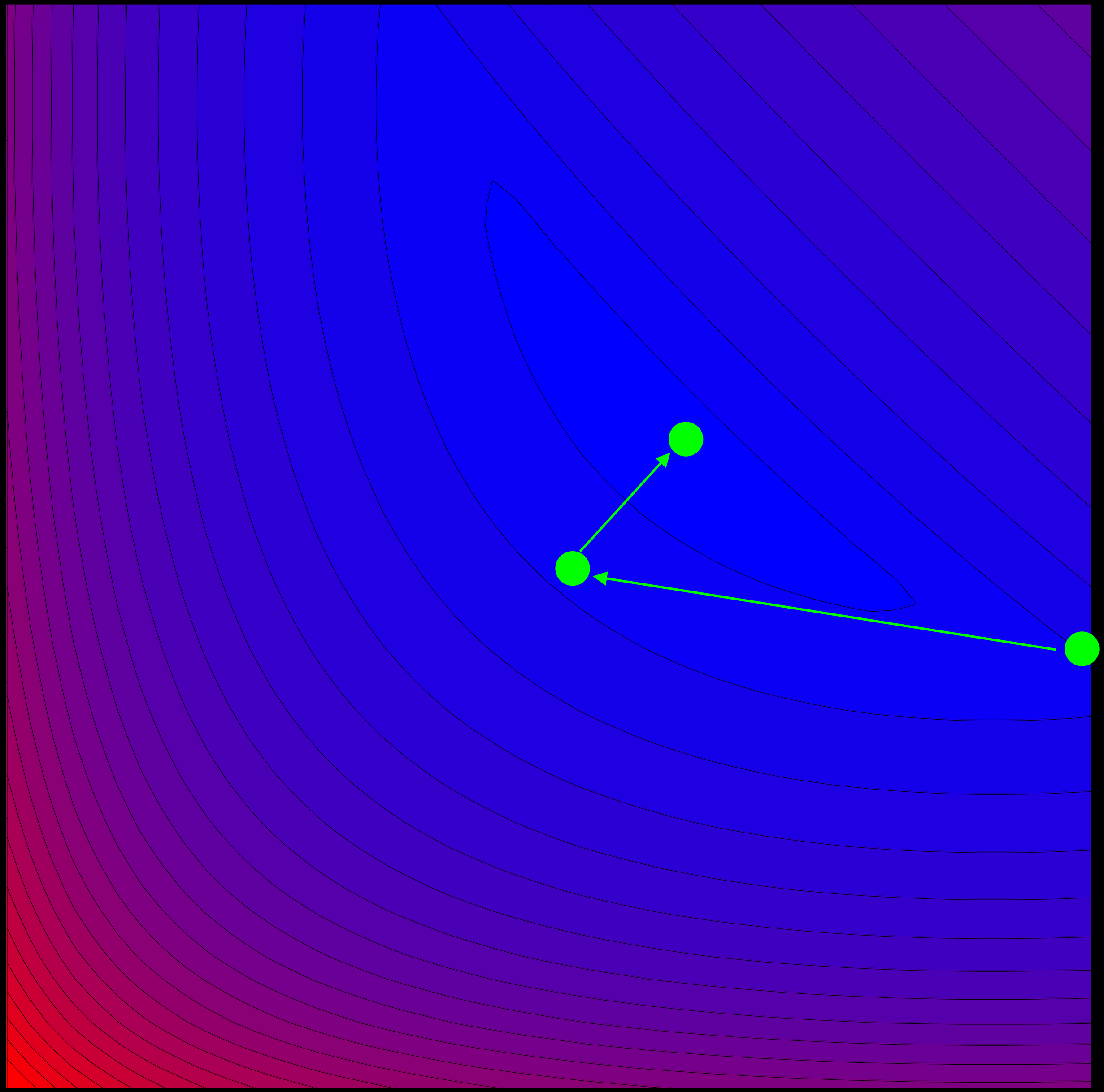
- Usar a técnica conhecida como “Jumping”

Newton:

$$[\Psi'' + \mu\, \Phi''] (p-p_o) = - [\Psi' + \mu\, \Phi']$$

$$(p-p_o) = - [\Psi'' + \mu\, \Phi'']^{-1} [\Psi' + \mu\, \Phi']$$

$$p = p_o - [\Psi'' + \mu\, \Phi'']^{-1} [\Psi' + \mu\, \Phi']$$

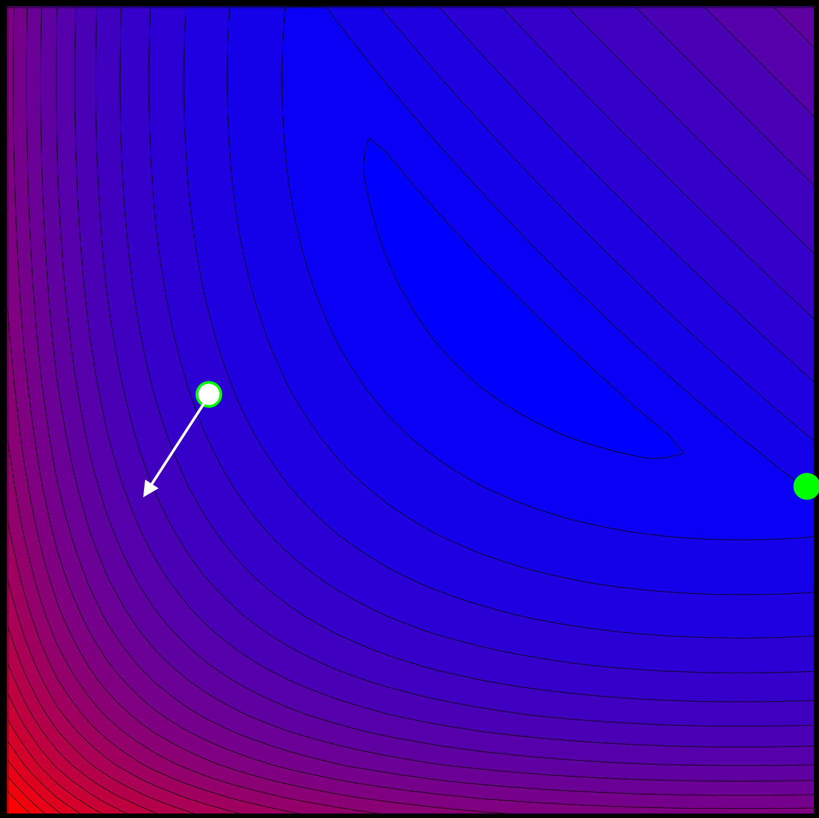


Newton:

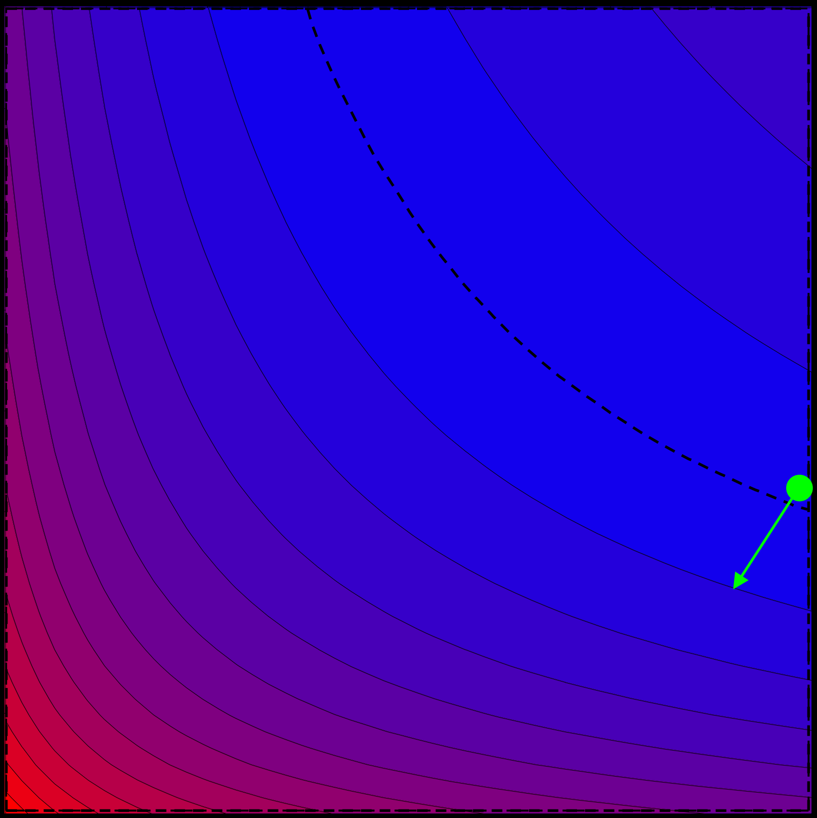
$$p = p_o - [\Psi'' + \mu\,\Phi'']^{-1}\,[\Psi' + \cancel{\mu\,\Phi'}]$$

Jumping:

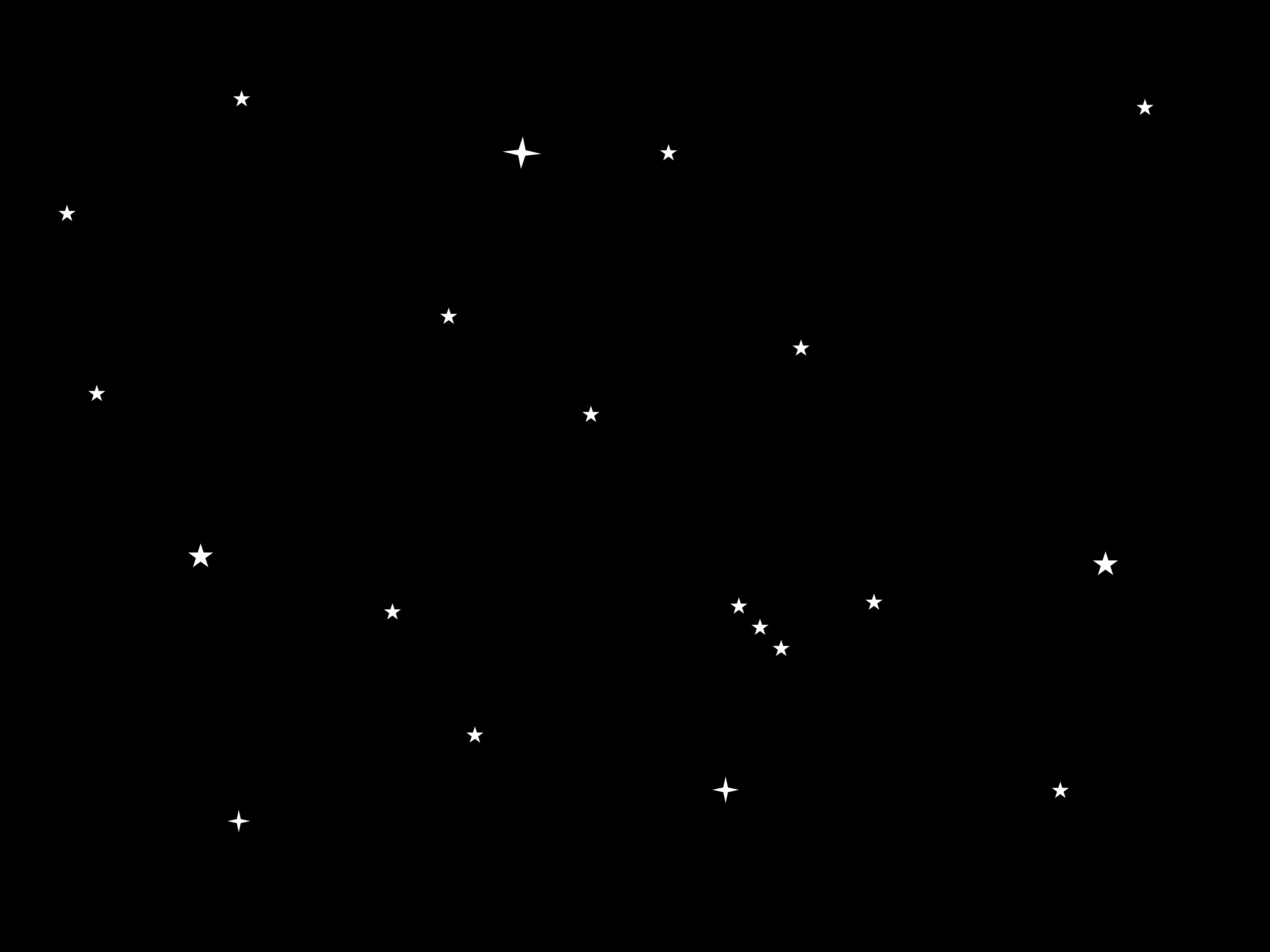
$$p = \mathbf{B}\,p_o - [\Psi'' + \mu\,\Phi'']^{-1}\;\Psi'$$



Função a ser minimizada

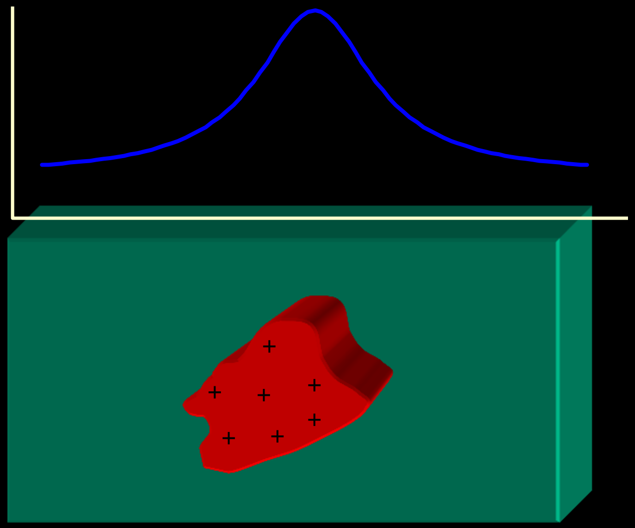


(Observação – ajuste)^2



Delimitação de um corpo em profundidade

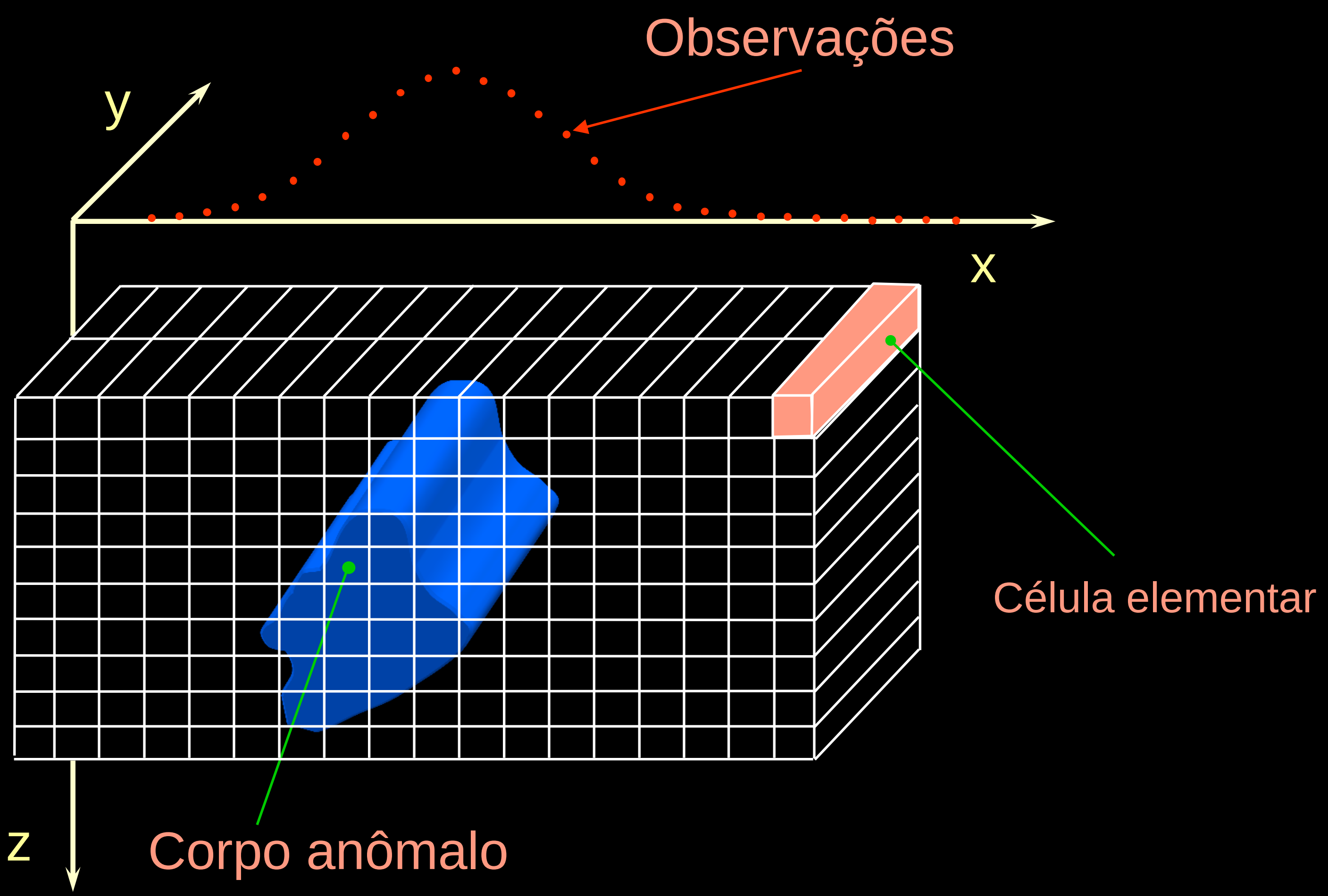
Ridge e suavidade



Problema geológico: localizar e delinear um corpo anômalo em profundidade a partir de um perfil gravimétrico ou magnético

Simplificação: corpo bidimensional

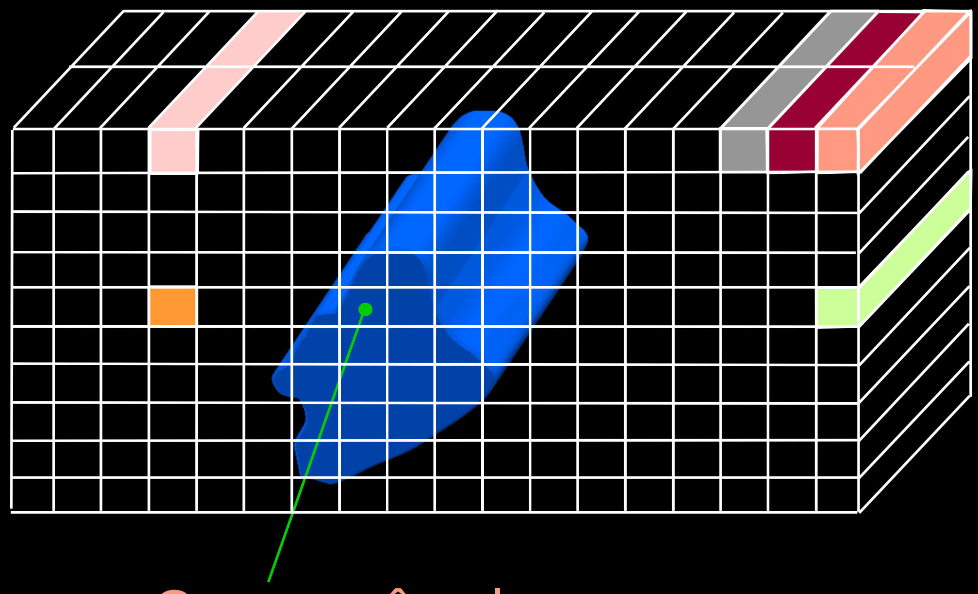
Modelo interpretativo

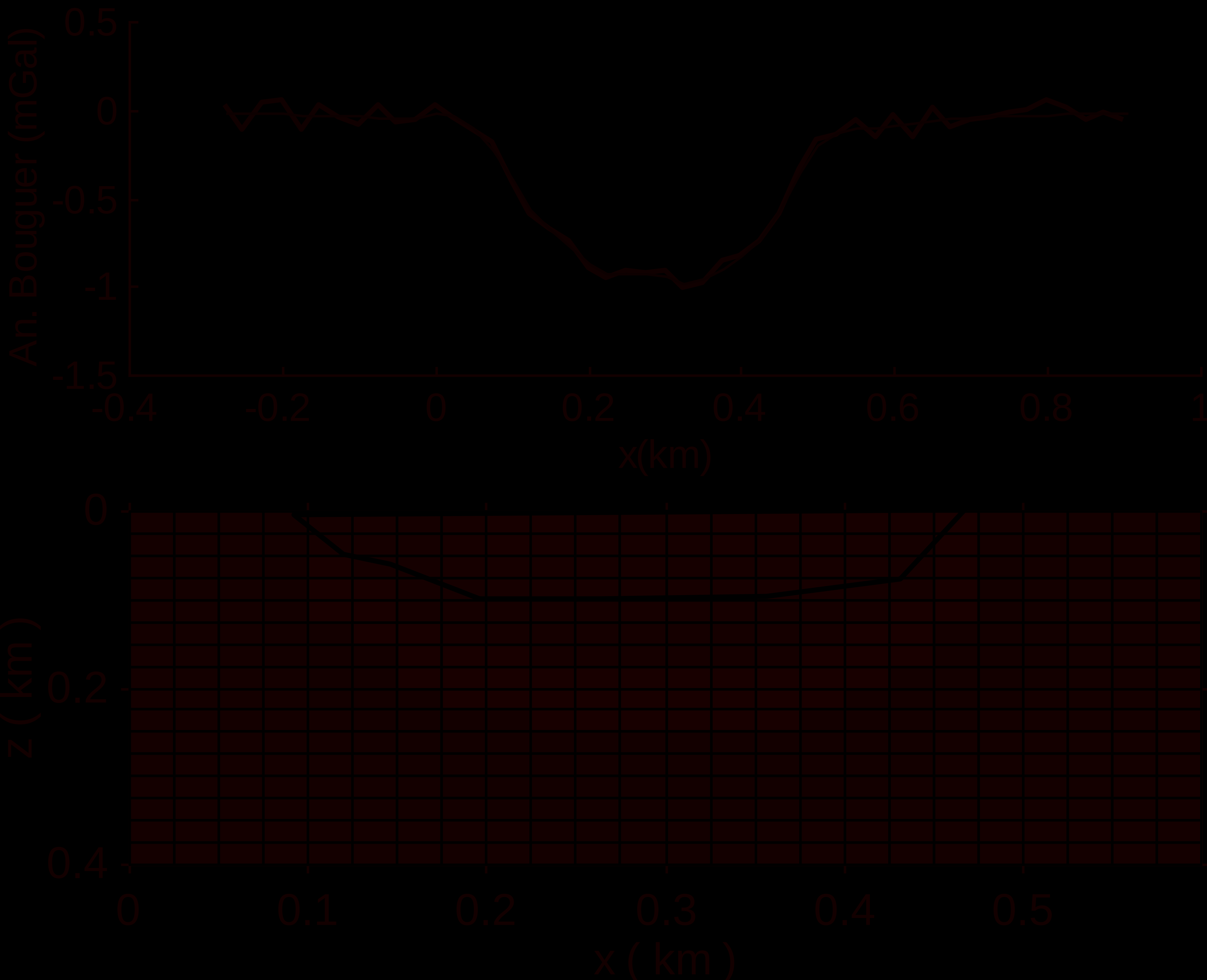


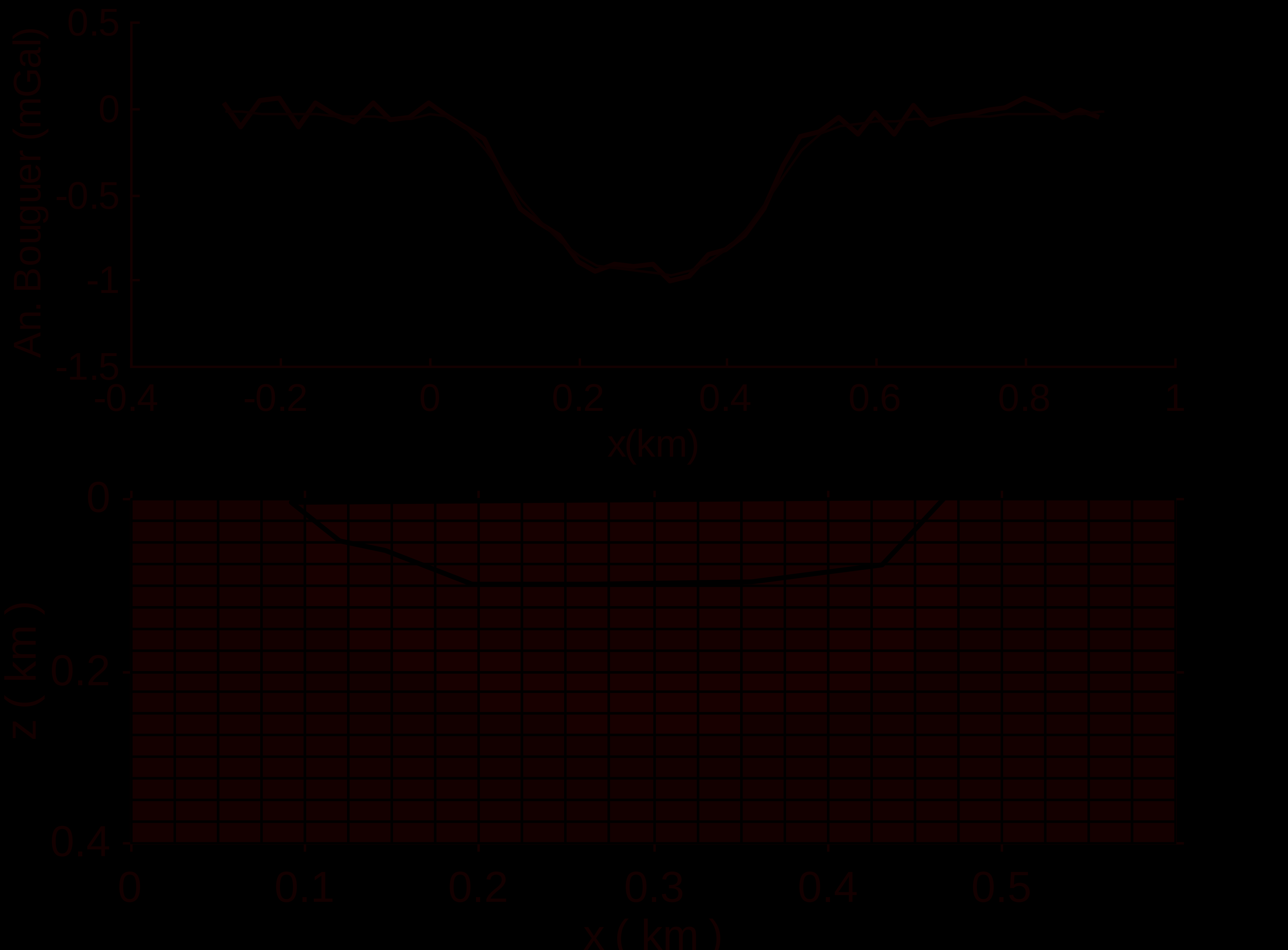
Estabilizadores:

Ridge: proximidade de todos os parâmetros de zero

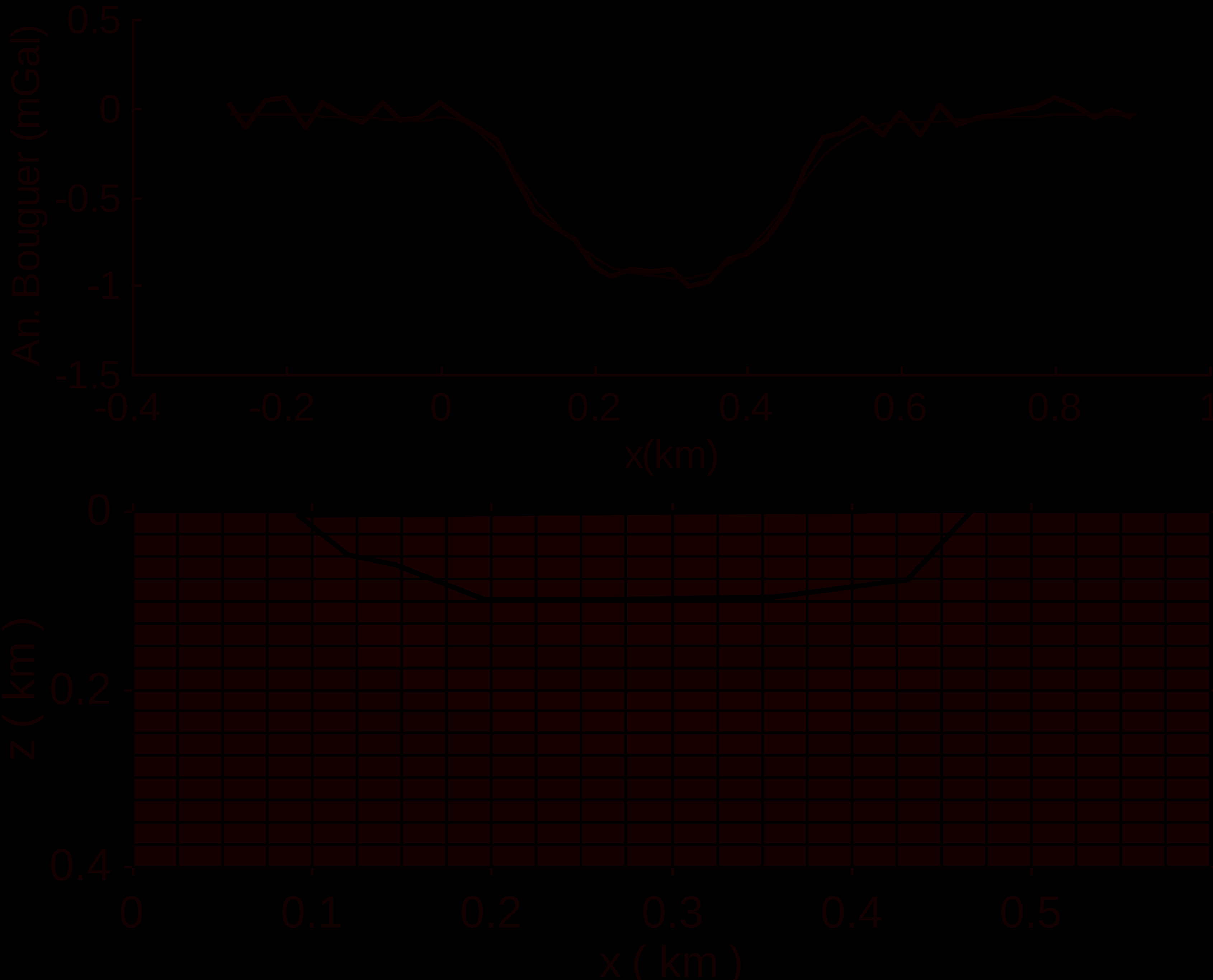
Suavidade: proximidade entre todos os parâmetros adjacentes



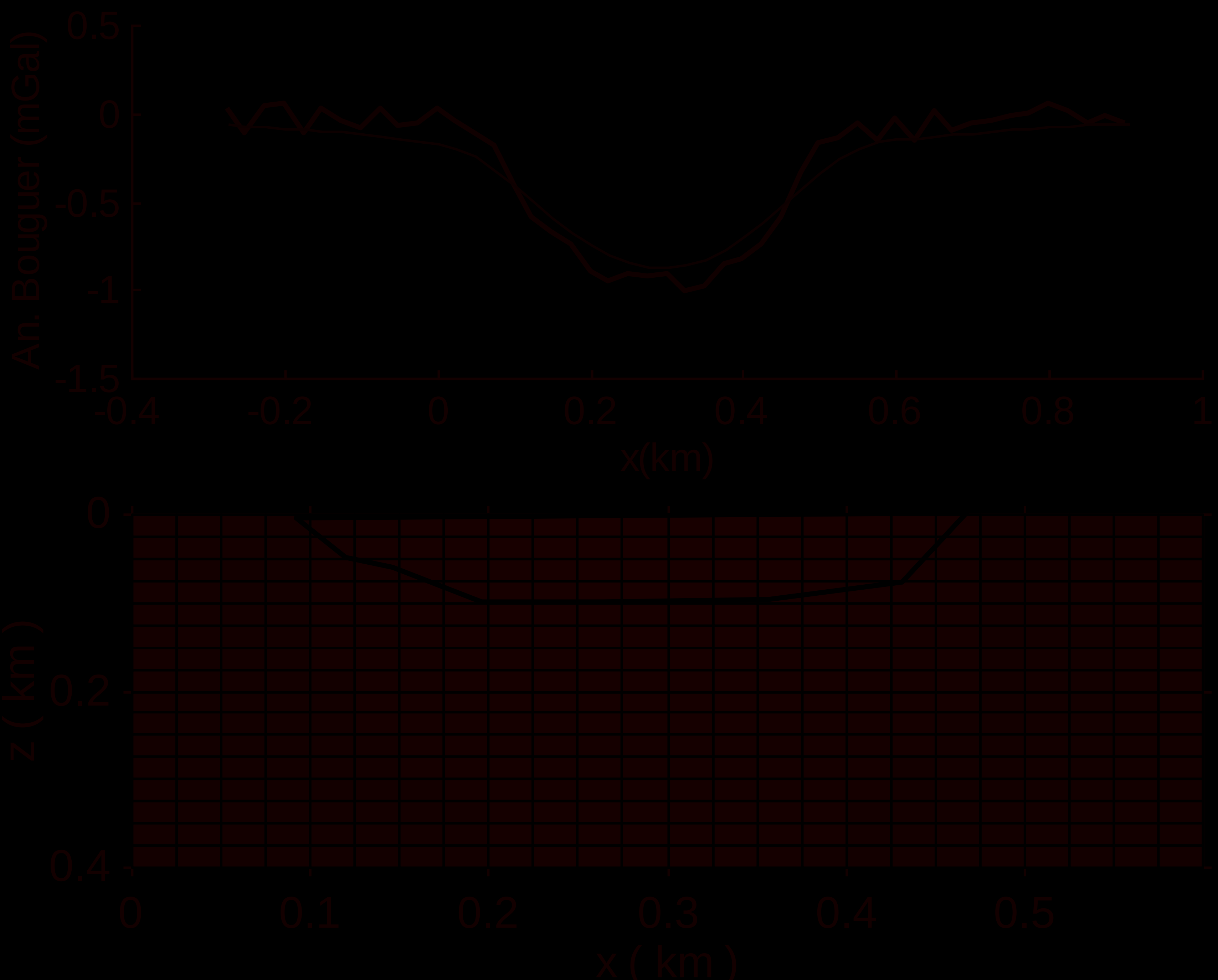

An. Bouguer (mGal)
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)



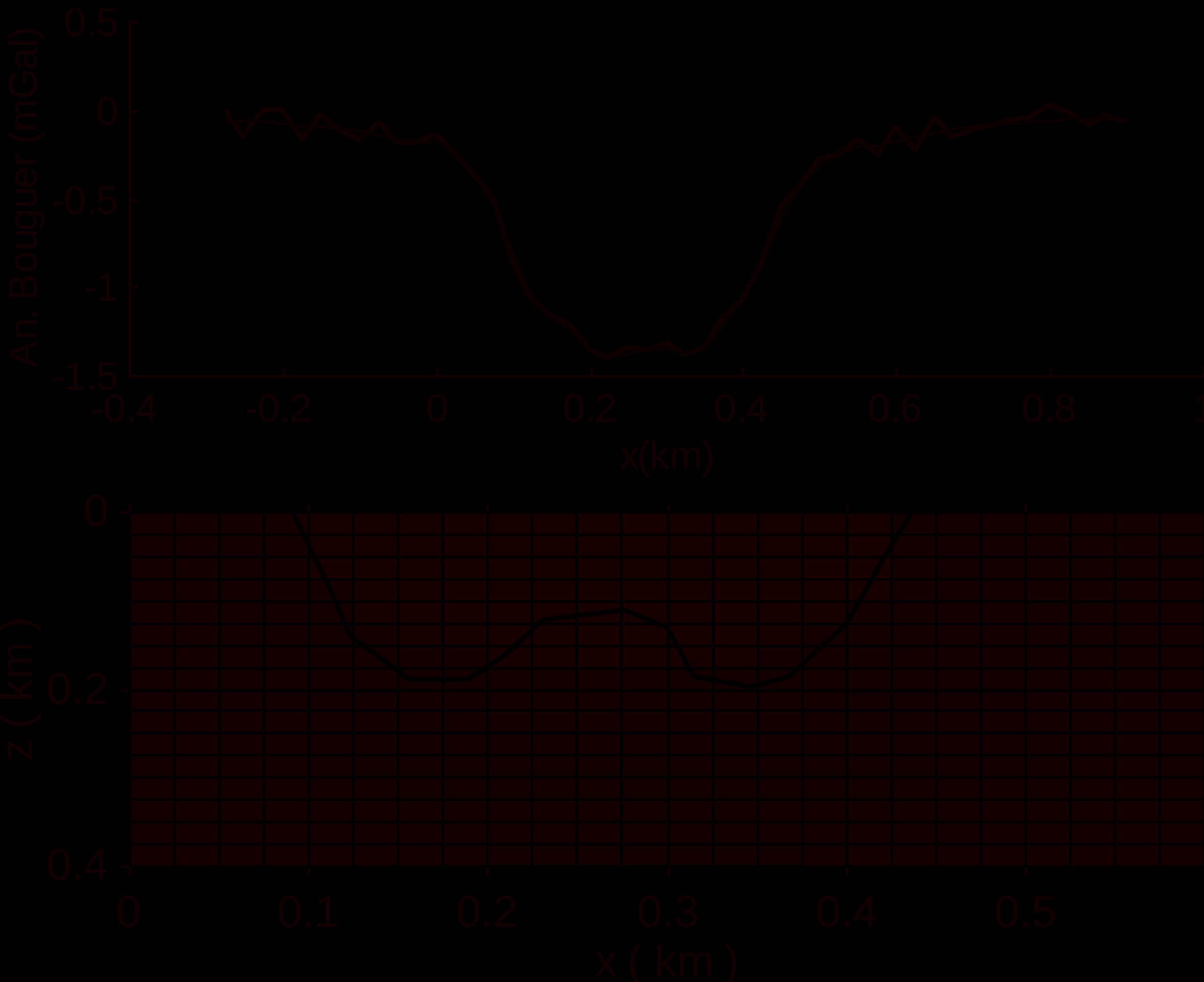
An. Bouguer (mGal)
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)



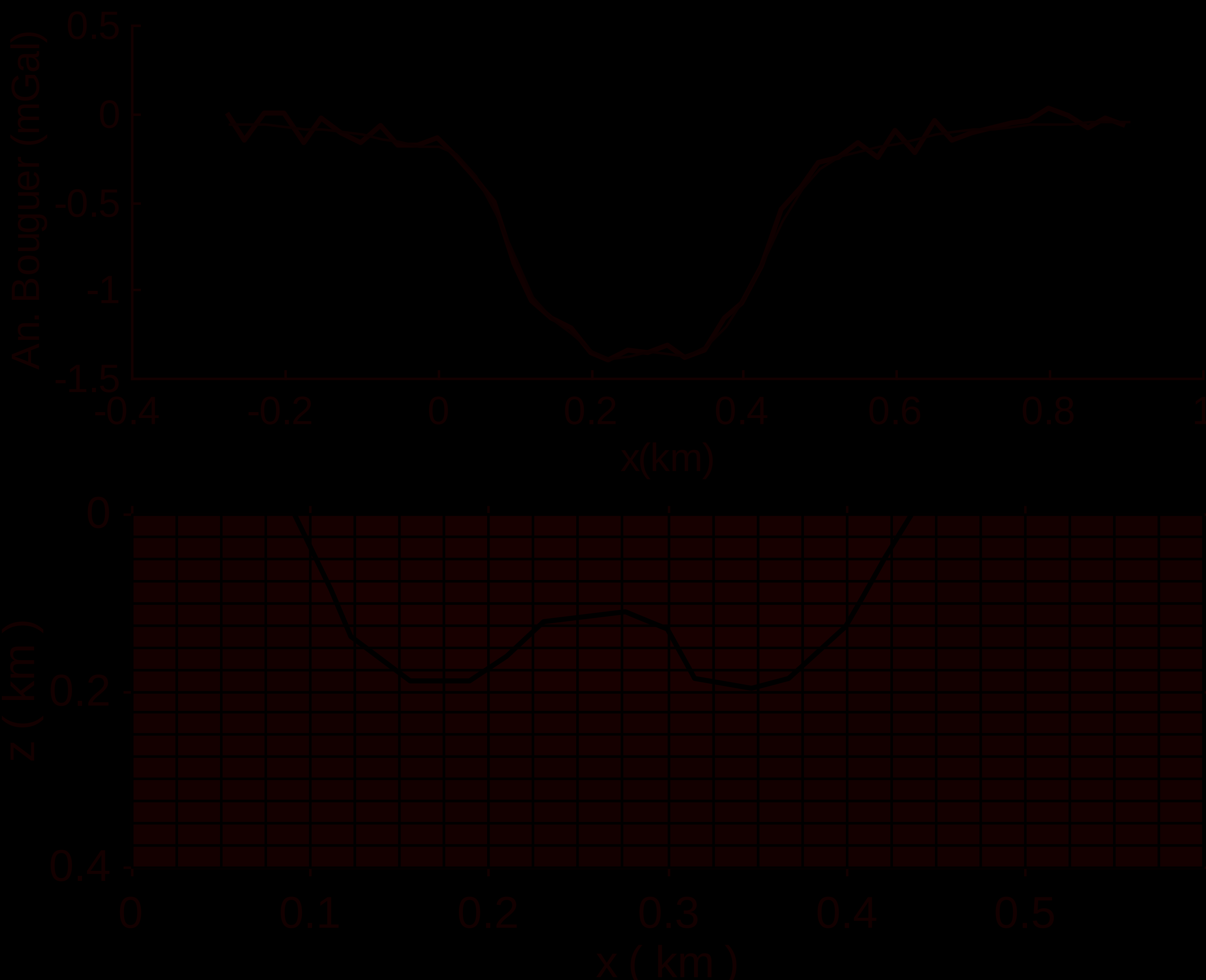
An. Bouguer (mGal)
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)



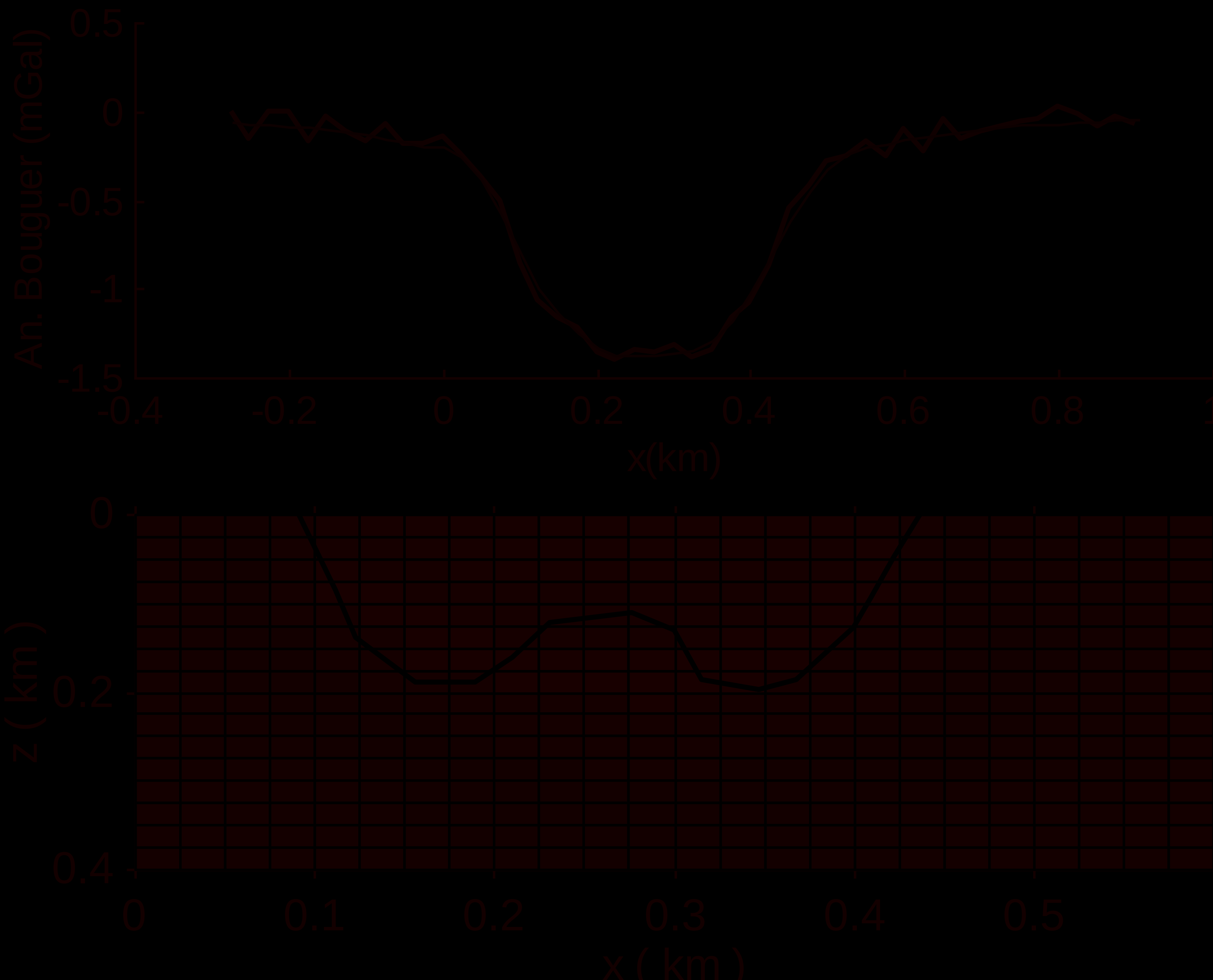
An. Bouguer (mGal)
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)

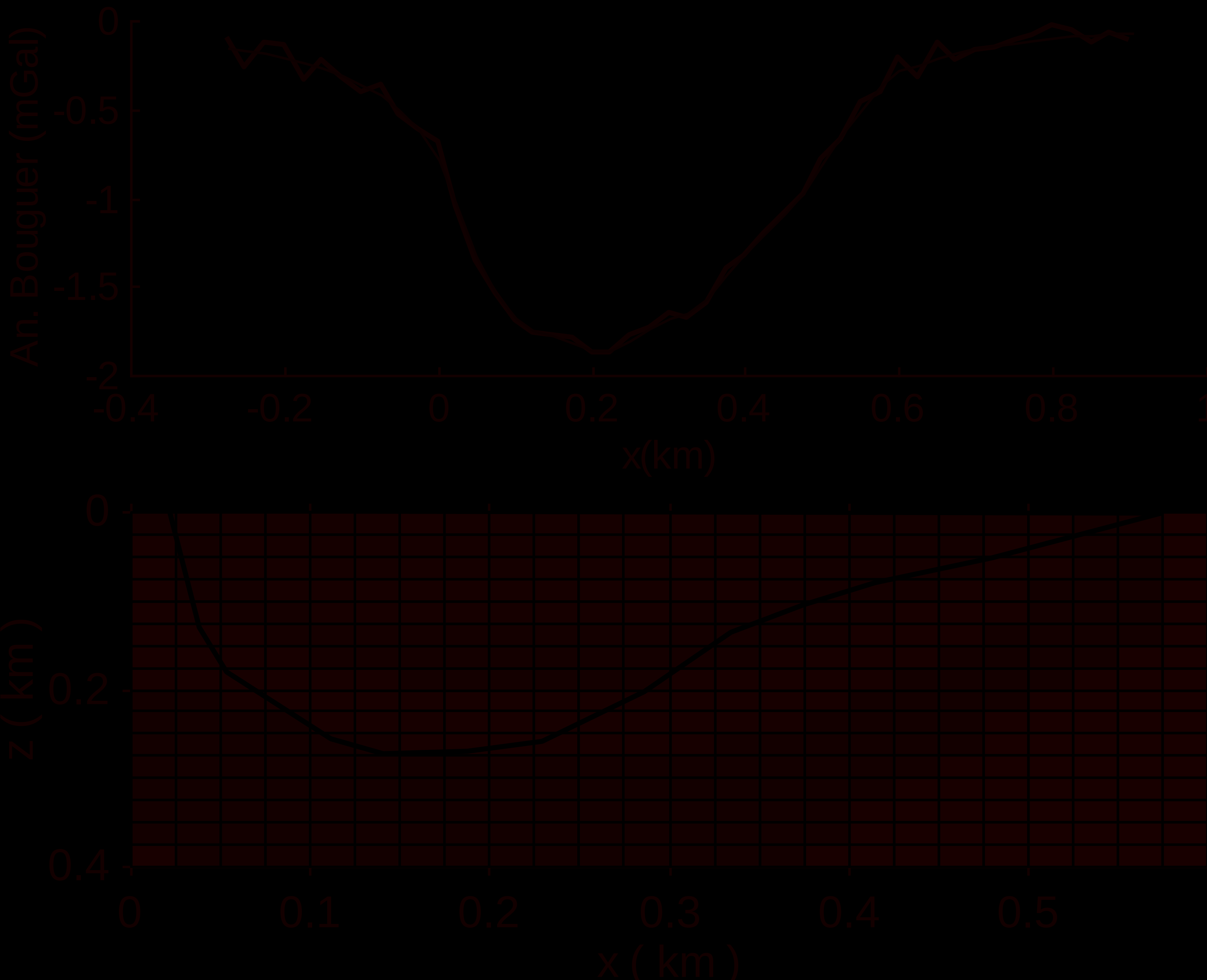


An. Bouguer (mGal)
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)

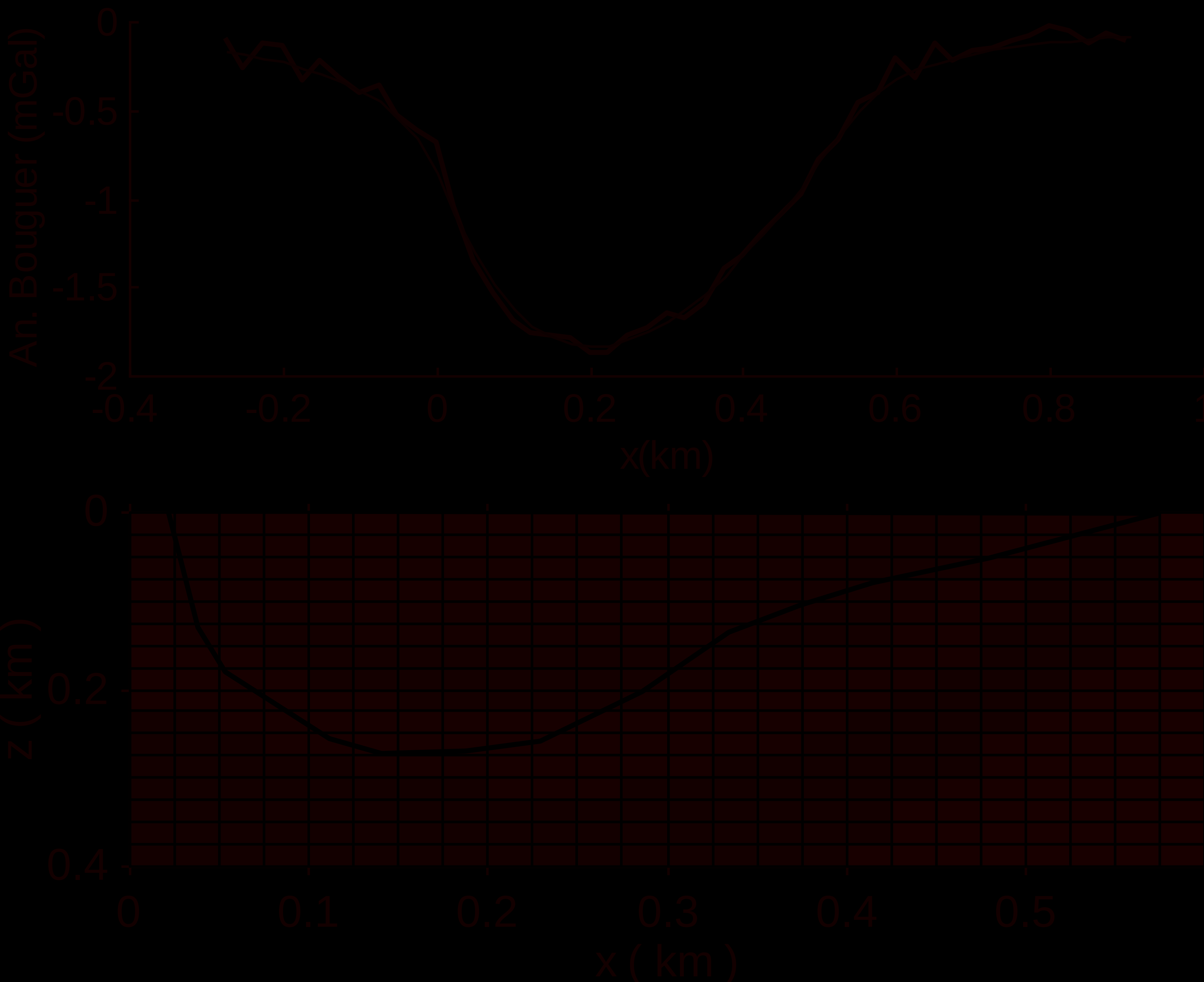


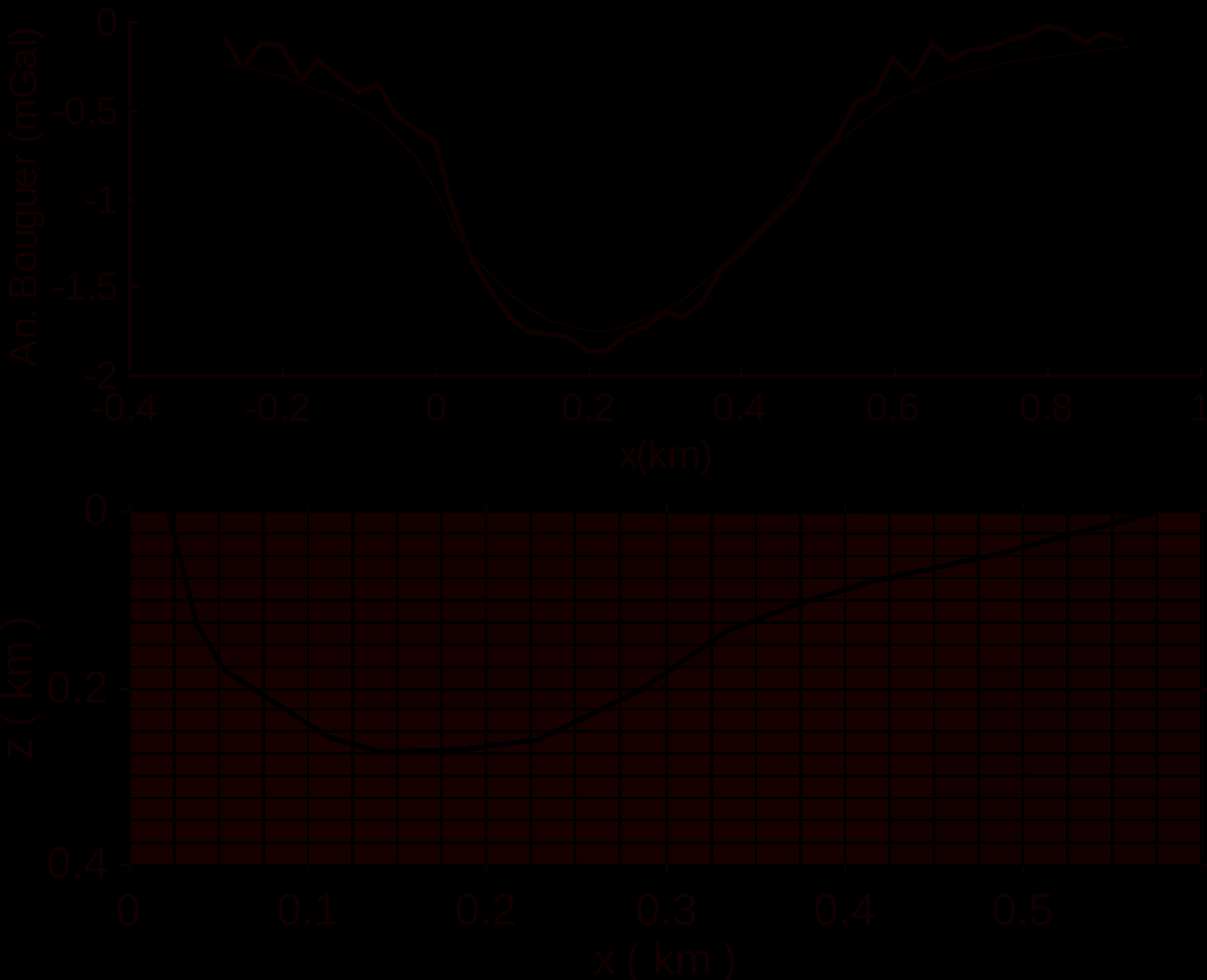
An. Bouguer (mGal)
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)


An. Bouguer (mGal)
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)

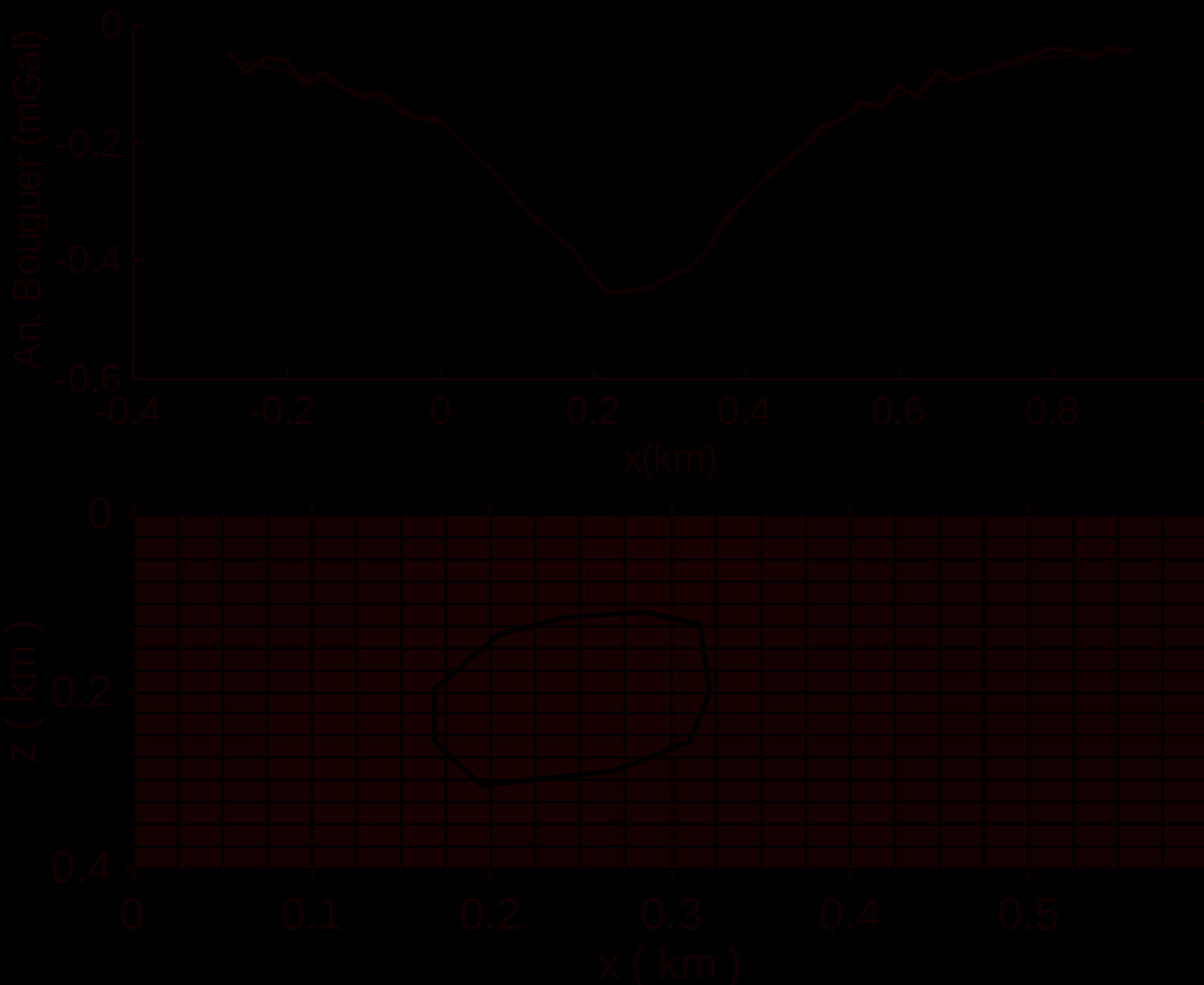


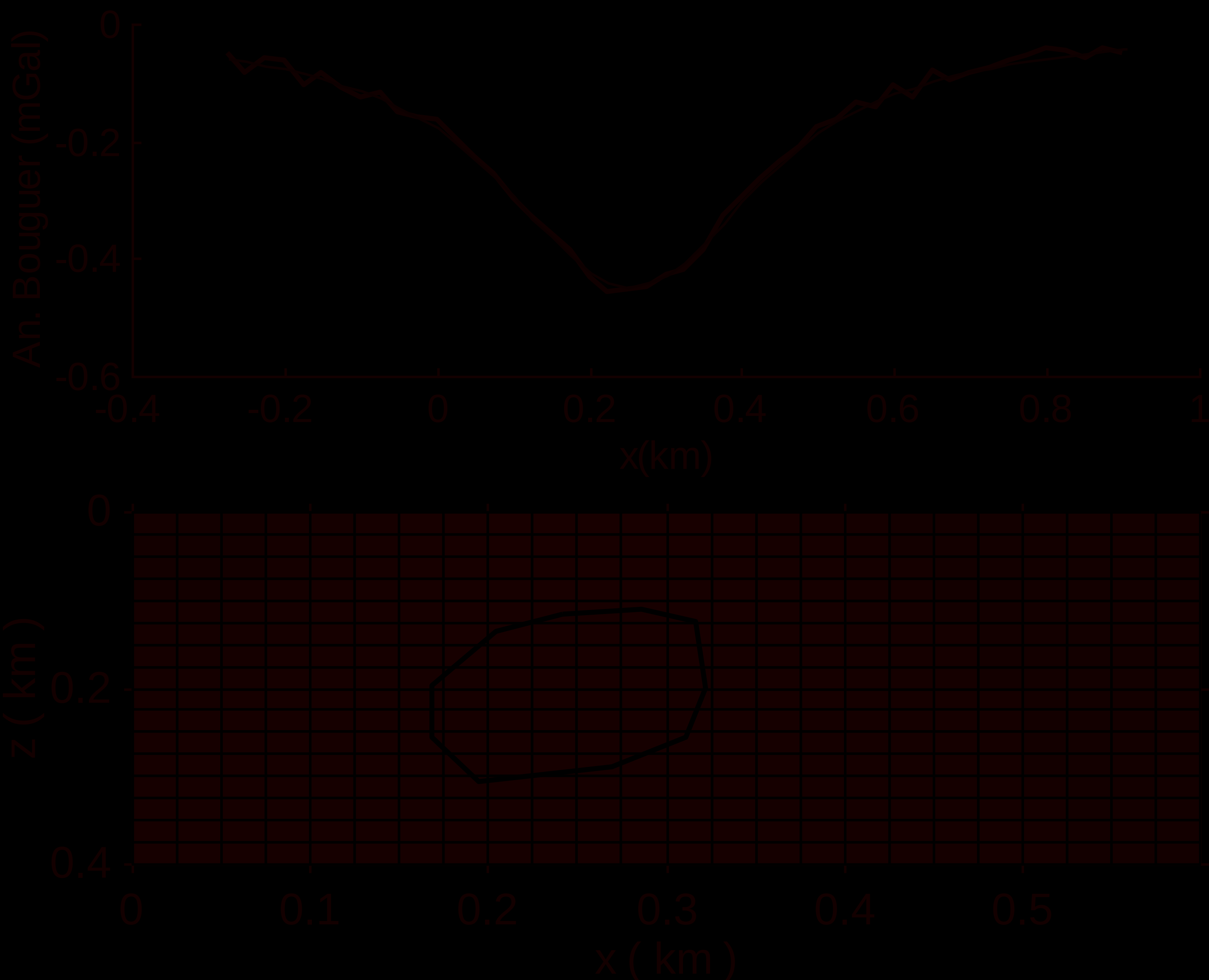
An. Bouguer (mGal)
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)


An. Bouguer (mGal)
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)

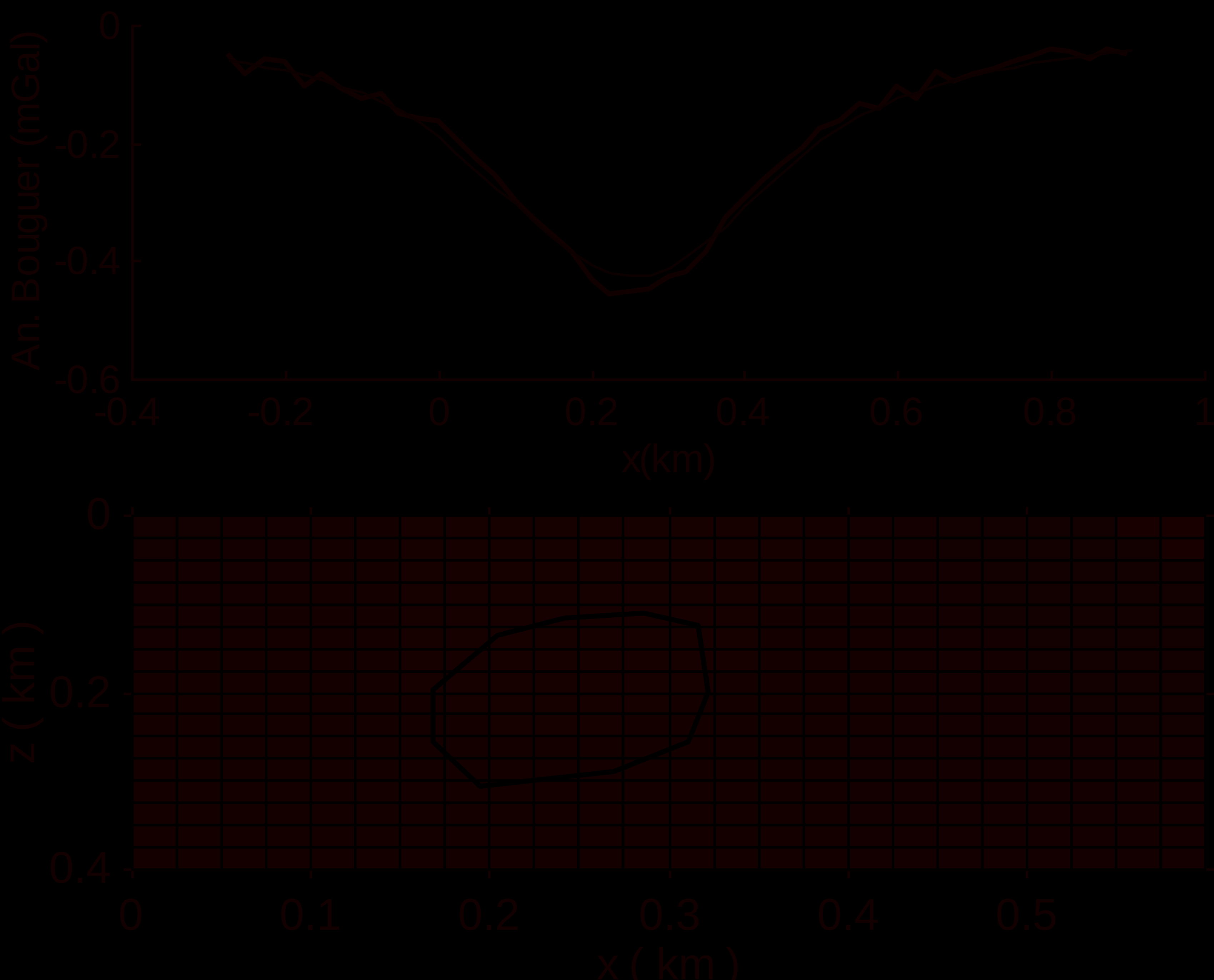


0
-0.5
-1
-1.5
-2
An. Bouguer (mGal)
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
0
0.2
0.4
z (km)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)


An. Bouguer (mGal)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)

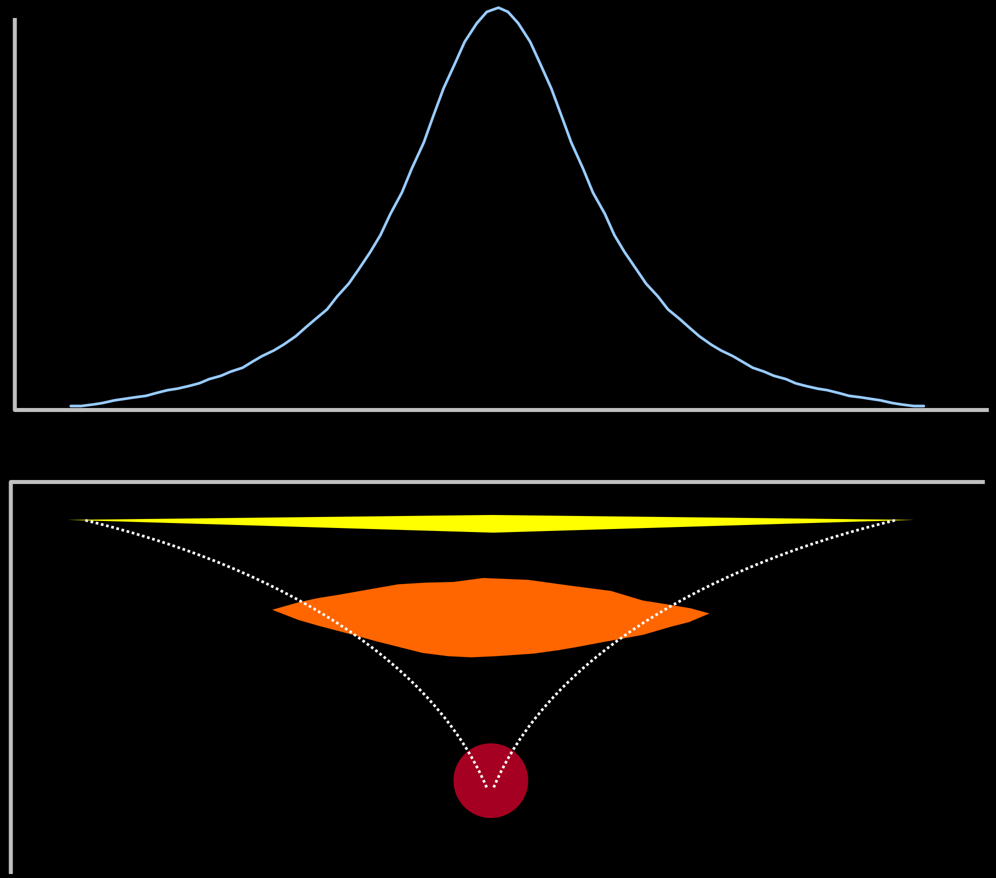


An. Bouguer (mGal)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)



An. Bouguer (mGal)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)

“Cone de ambiguidade” (Nettleton, 1976)

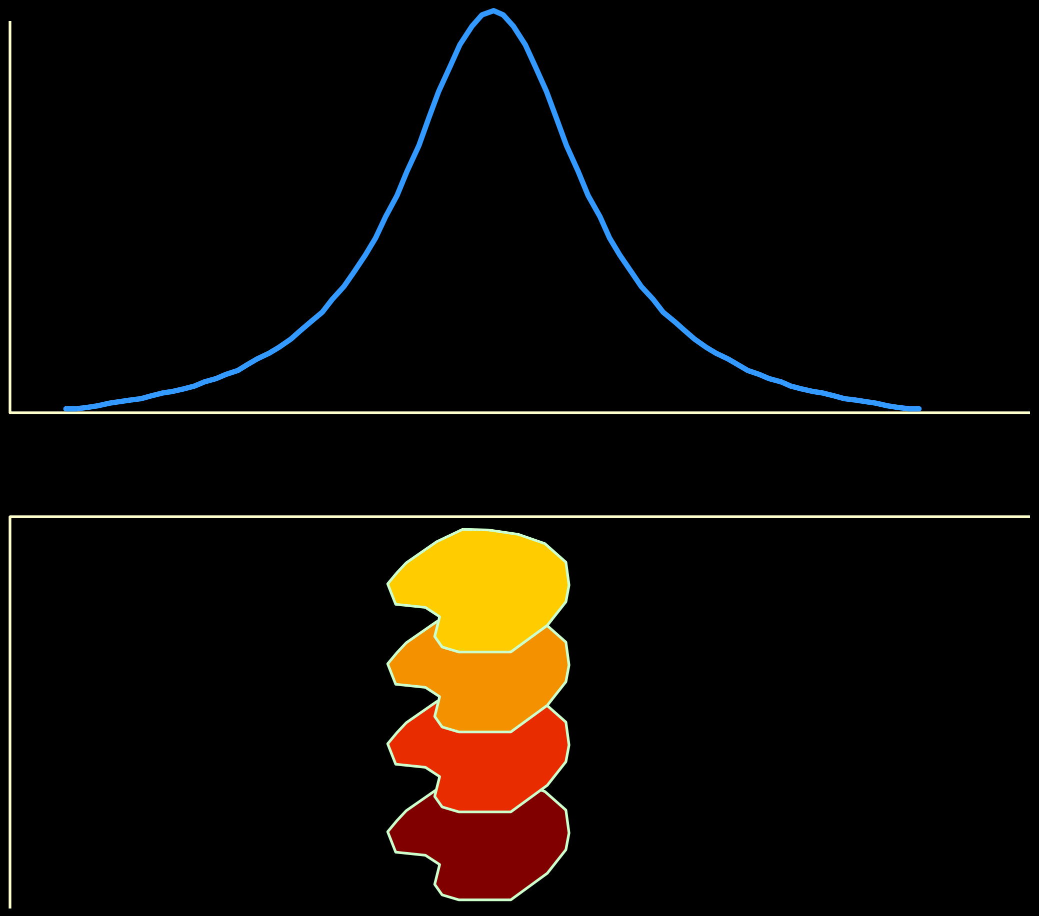


Ridge

min $\mathbf{p}^T\mathbf{p} \equiv \mathbf{min}\ [\ (\mathbf{p}_1)^2 + (\mathbf{p}_2)^2 + \ldots\ (\mathbf{p}_M)^2\ ]$

sujeito a

$(\mathbf{y}^o - \mathbf{Ap})^T\ (\mathbf{y}^o - \mathbf{Ap}) = \delta$

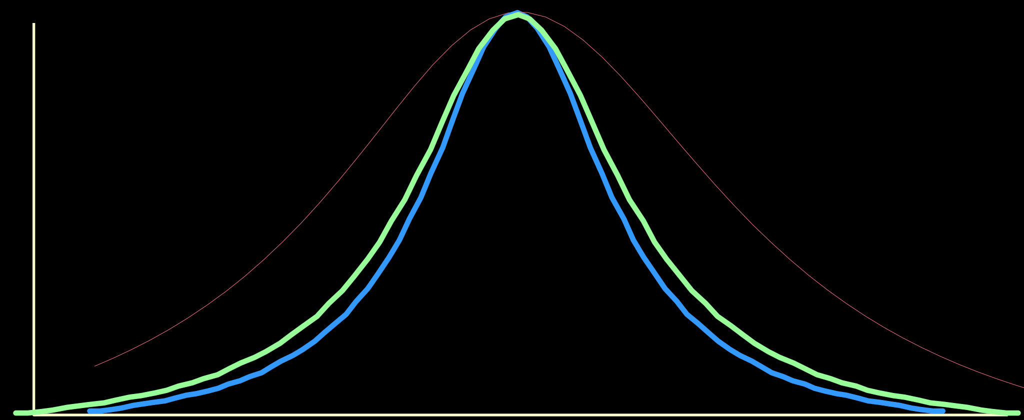


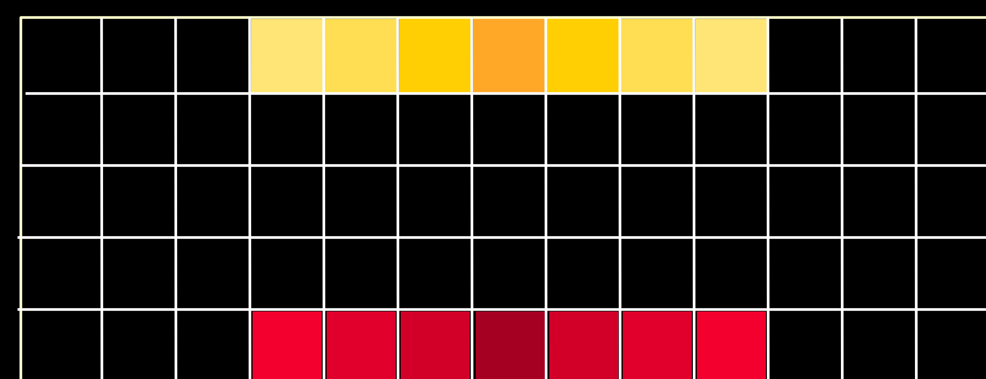
Suavidade

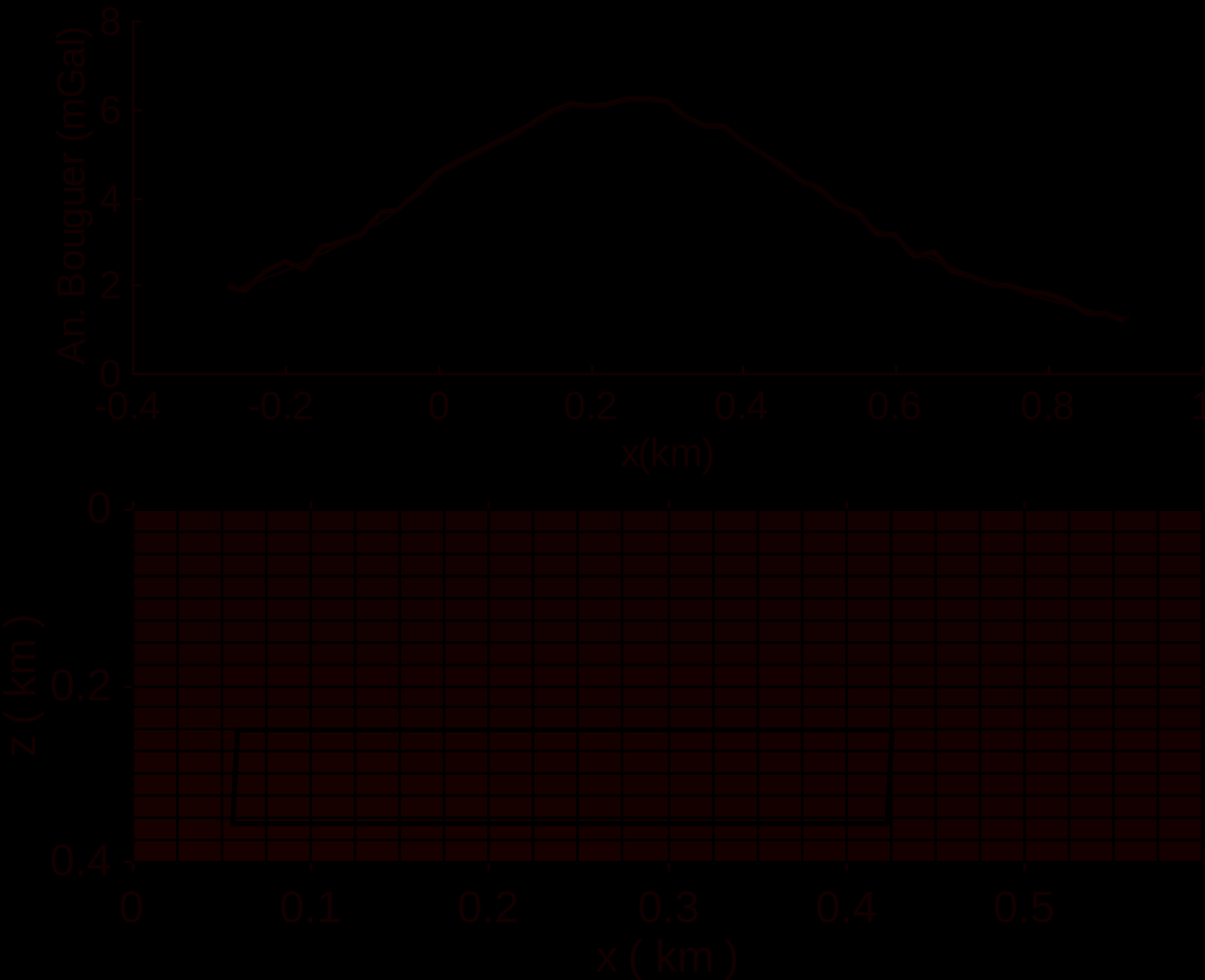
$\min\ [\ (p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + \ldots\ (p_{M-1} - p_M)^2\ ] \longrightarrow (p_1 \blacklozenge p_2) + (p_2 \blacklozenge p_3) + \ldots\ (p_{M-1} \blacklozenge p_M)$

sujeito a

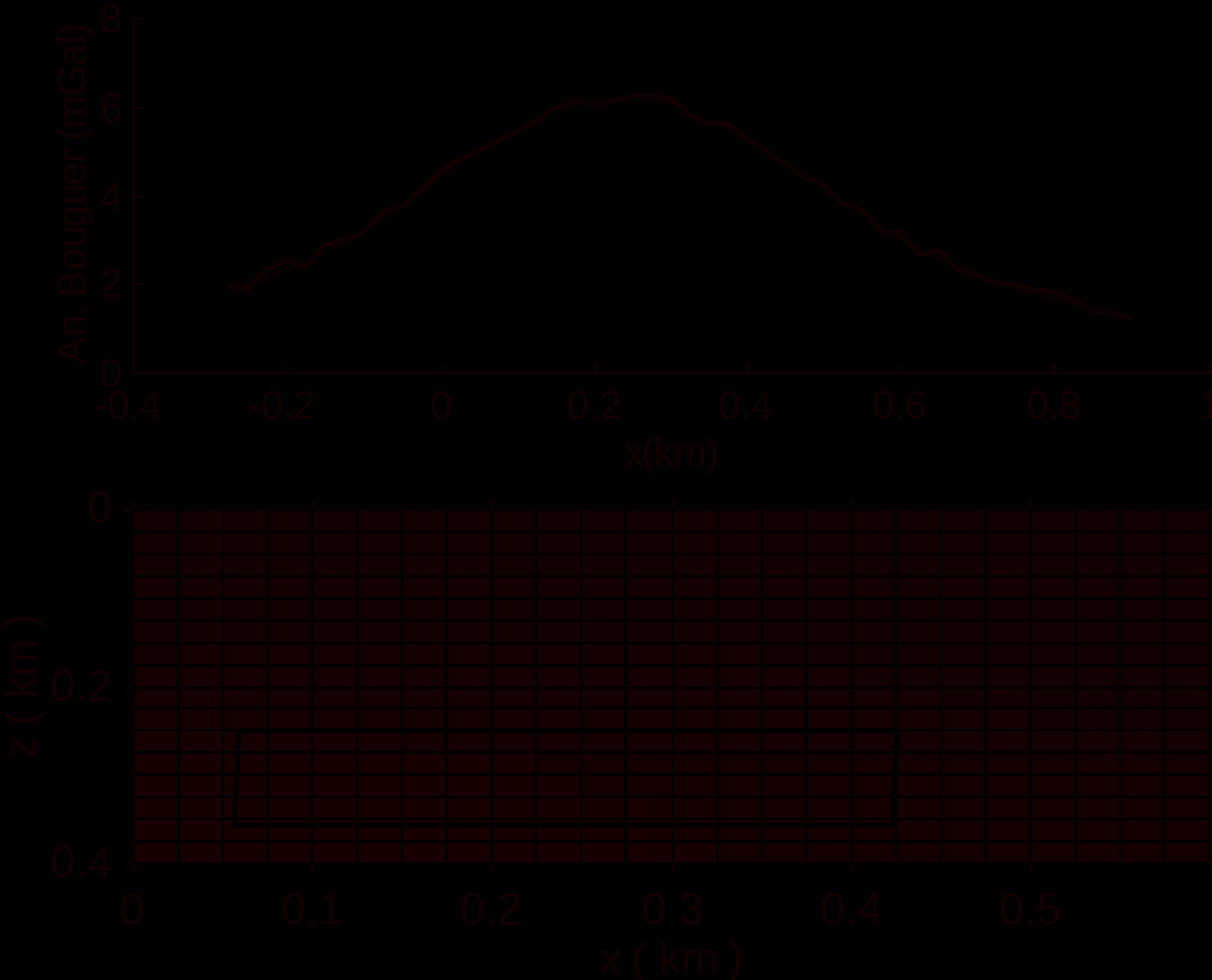
$(\mathbf{y}^o - \mathbf{Ap})^T (\mathbf{y}^o - \mathbf{Ap}) = \delta$



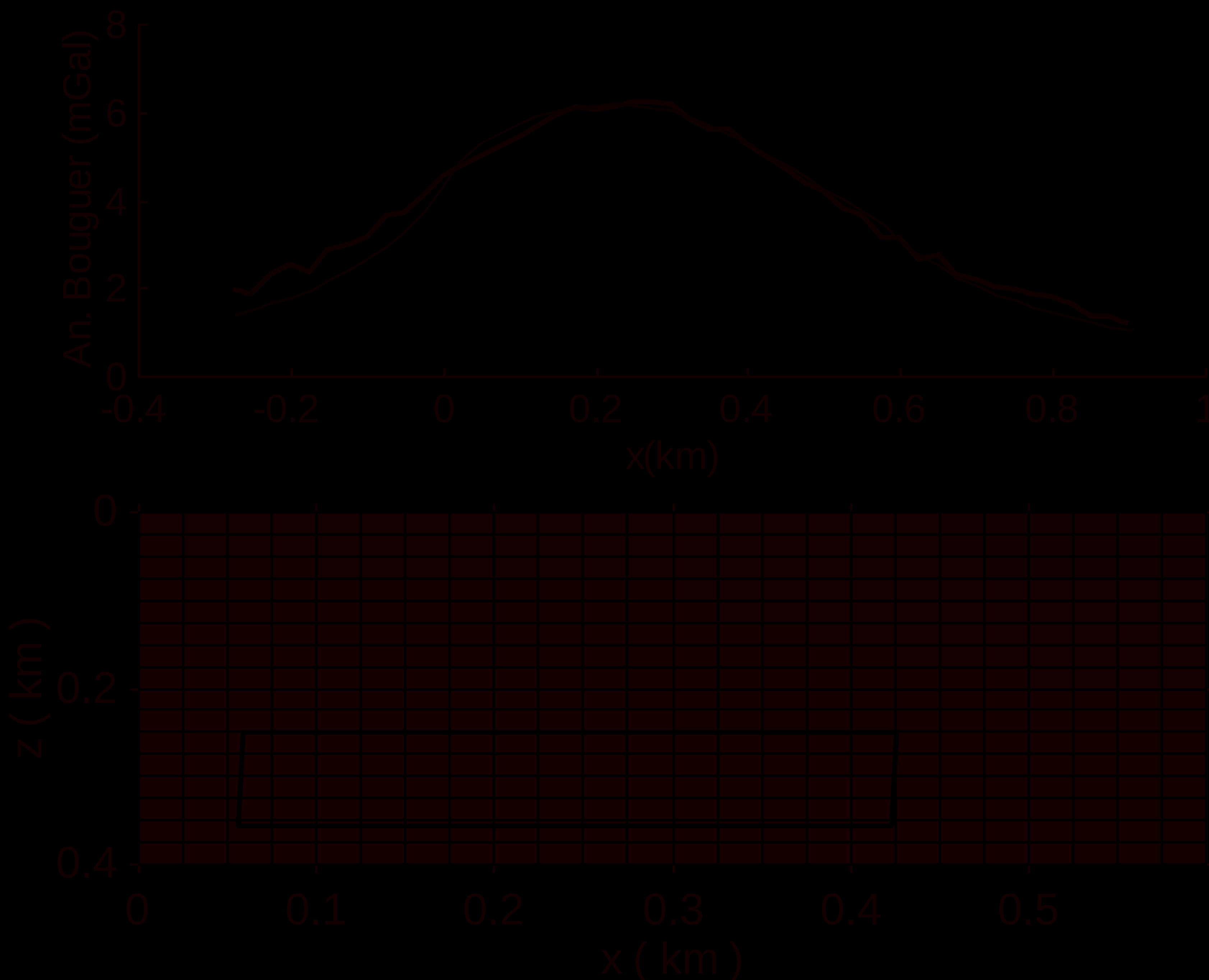




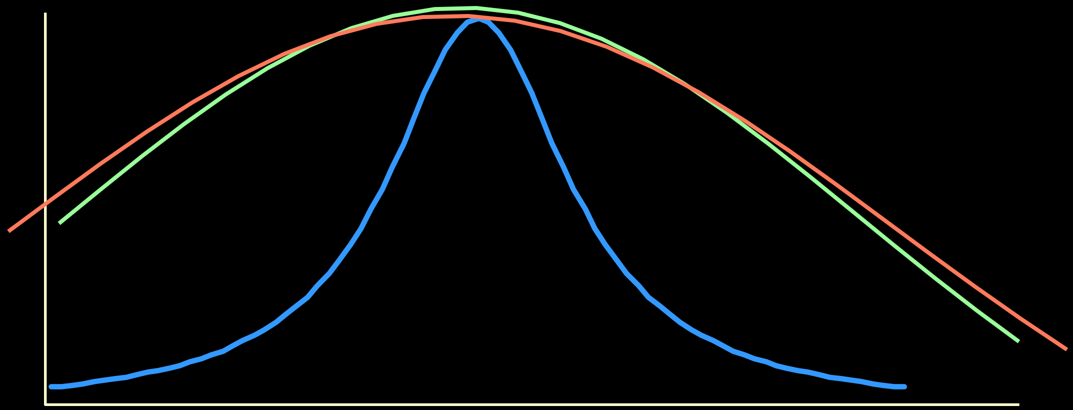
An. Bouguer (mGal)
8
6
4
2
0
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)

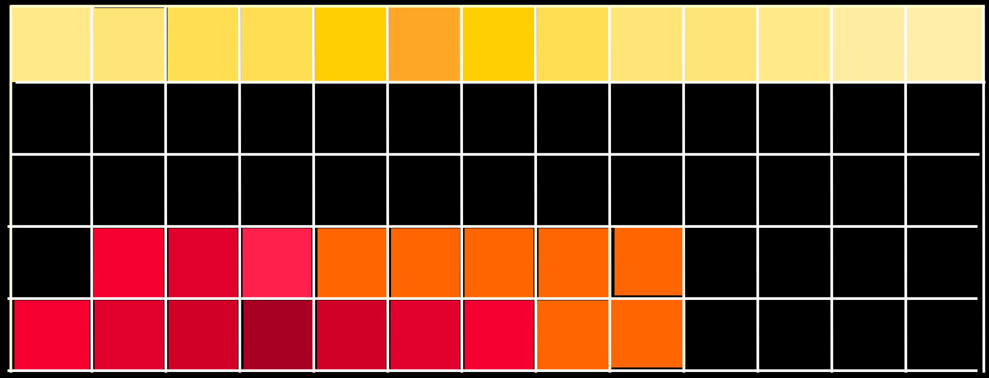


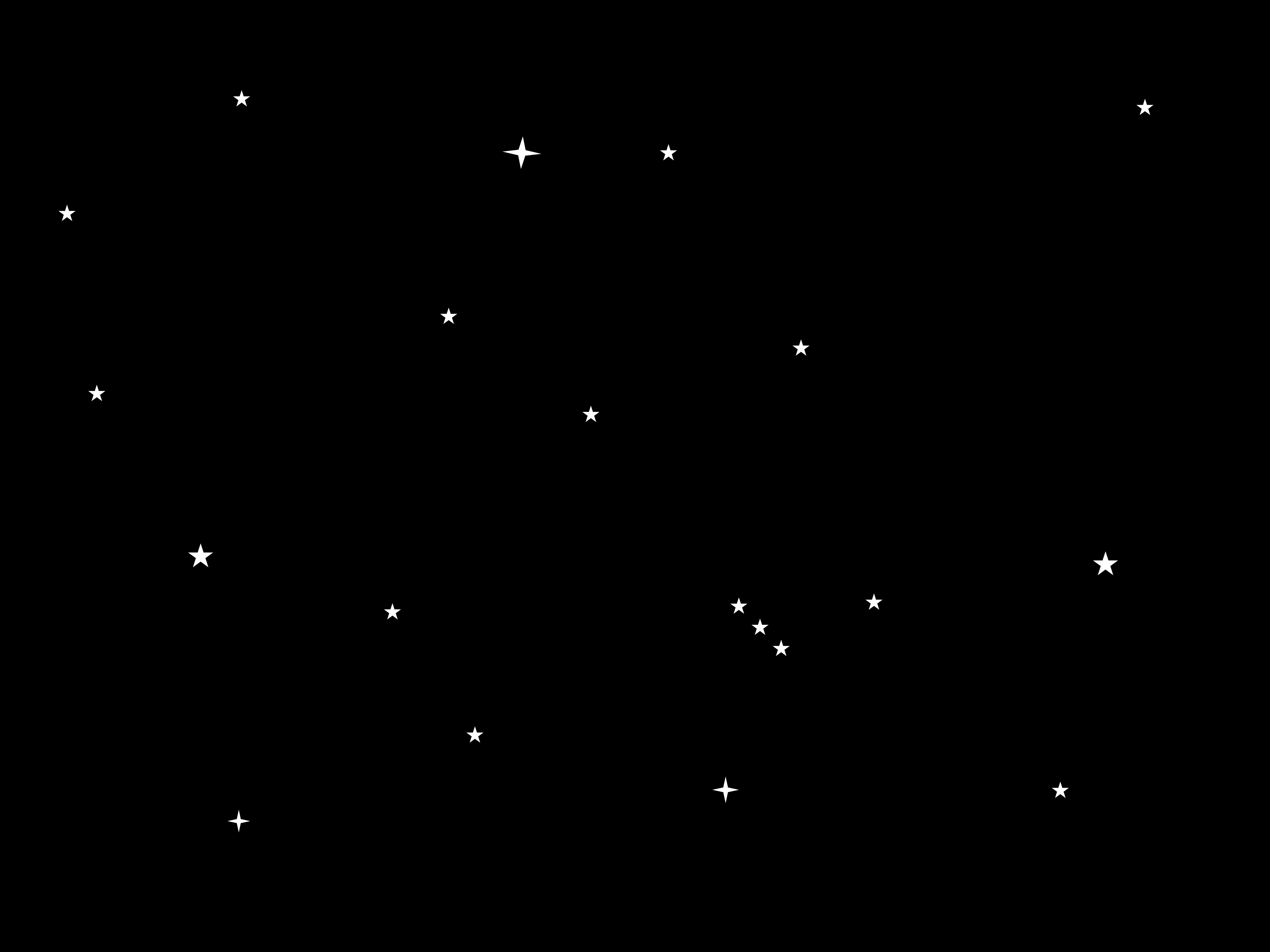
An. Bouguer (mGal)
8
6
4
2
0
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)



An. Bouguer (mGal)
8
6
4
2
0
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(km)
z (km)
0
0.2
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x (km)

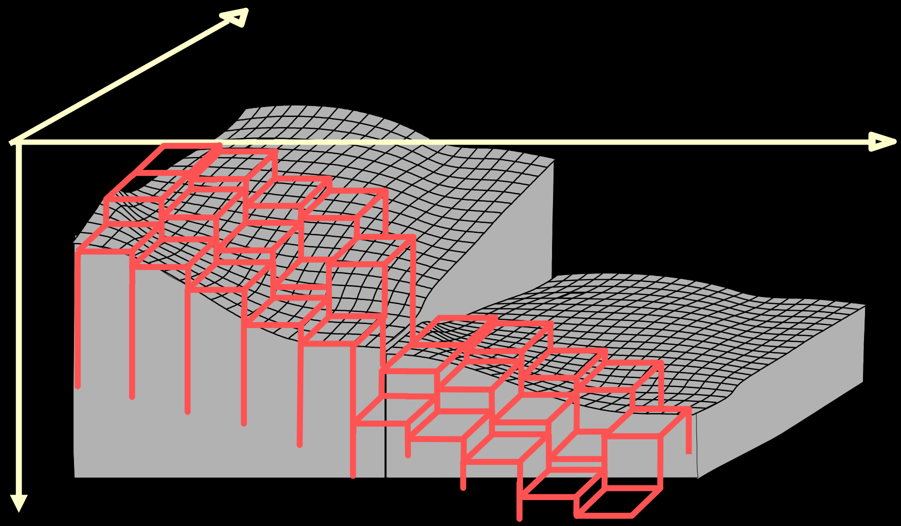






Mapeamento em planta de uma interface descontínua.

Suavidade ponderada, Desigualdade e Igualdade absoluta



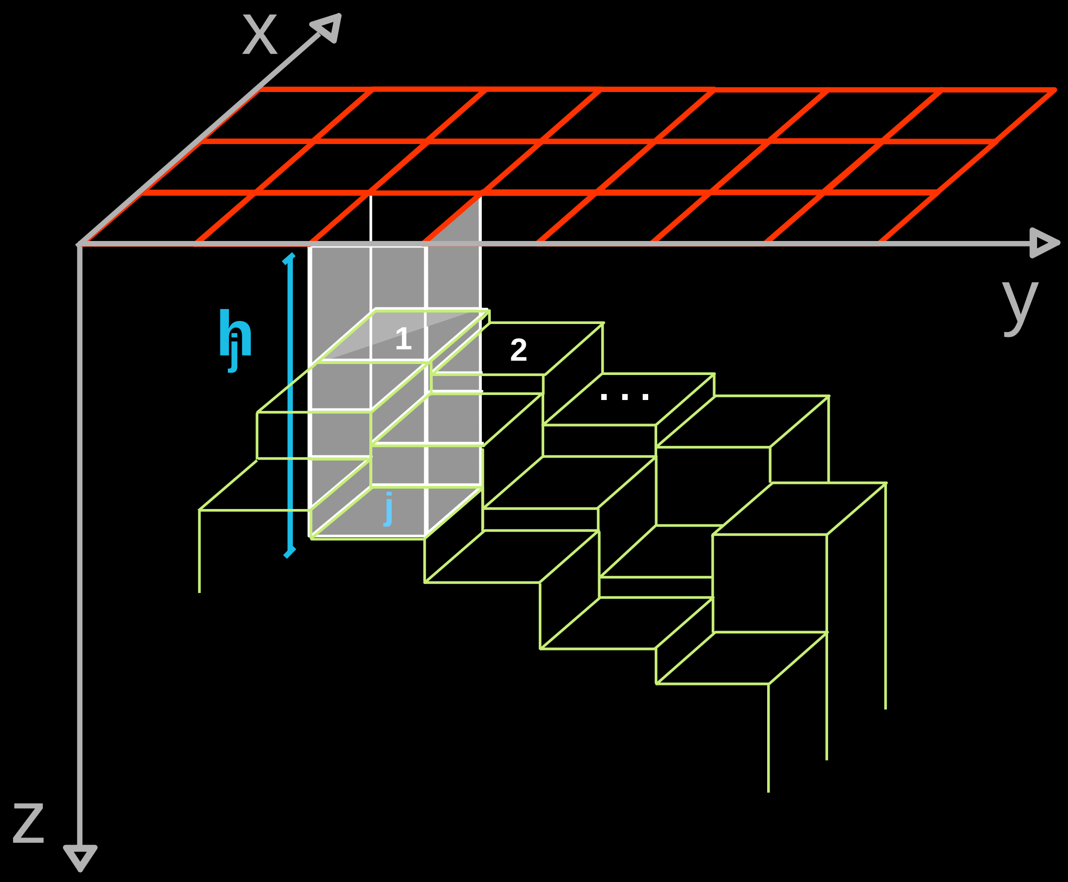
Problema geológico: mapeamento em planta do relevo de uma interface contínua e suave por partes como por exemplo o embasamento de bacias formadas por falhas

Simplificações: a) a resposta geofísica é causada por uma única interface

b) a interface separa dois meios homogêneos cujo contraste de propriedade física entre eles é conhecido

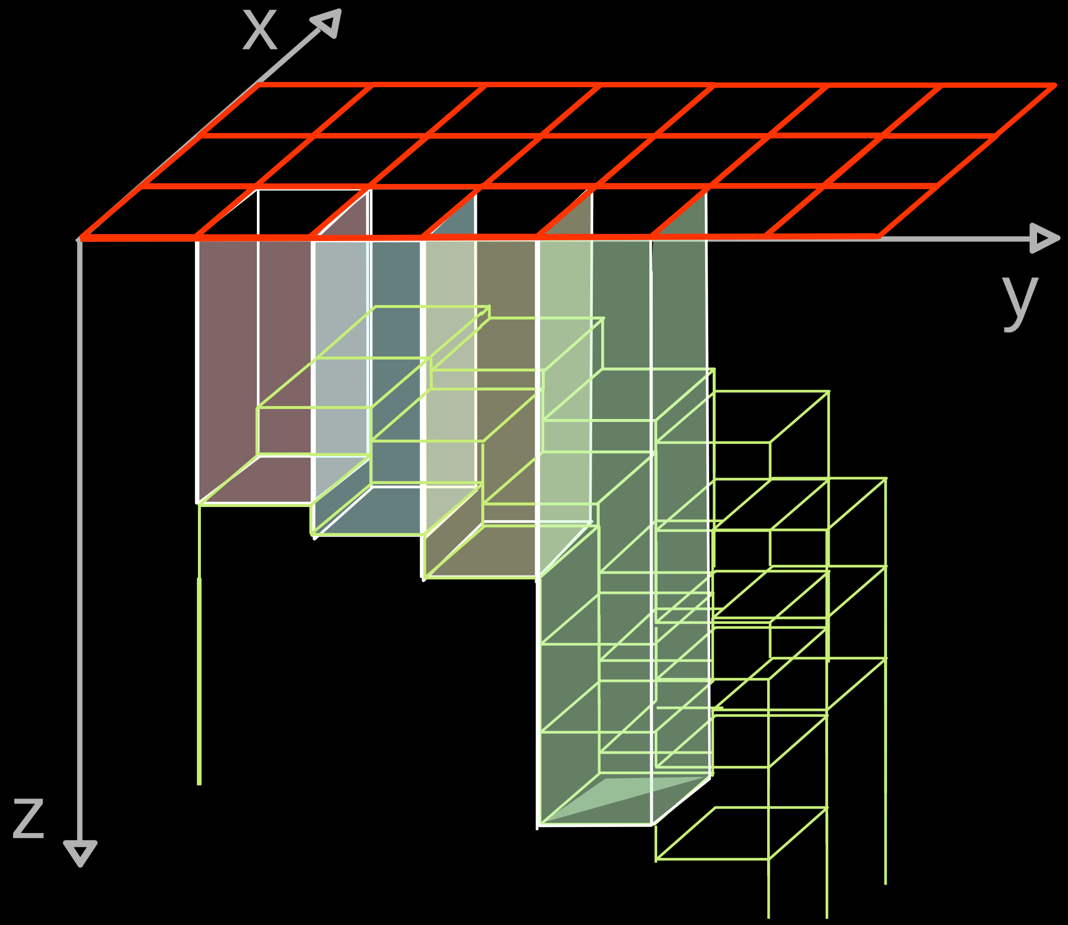
c) A parte mais profunda da interface é achatada e tem profundidade conhecida

Modelo interpretativo



Vínculo principal:

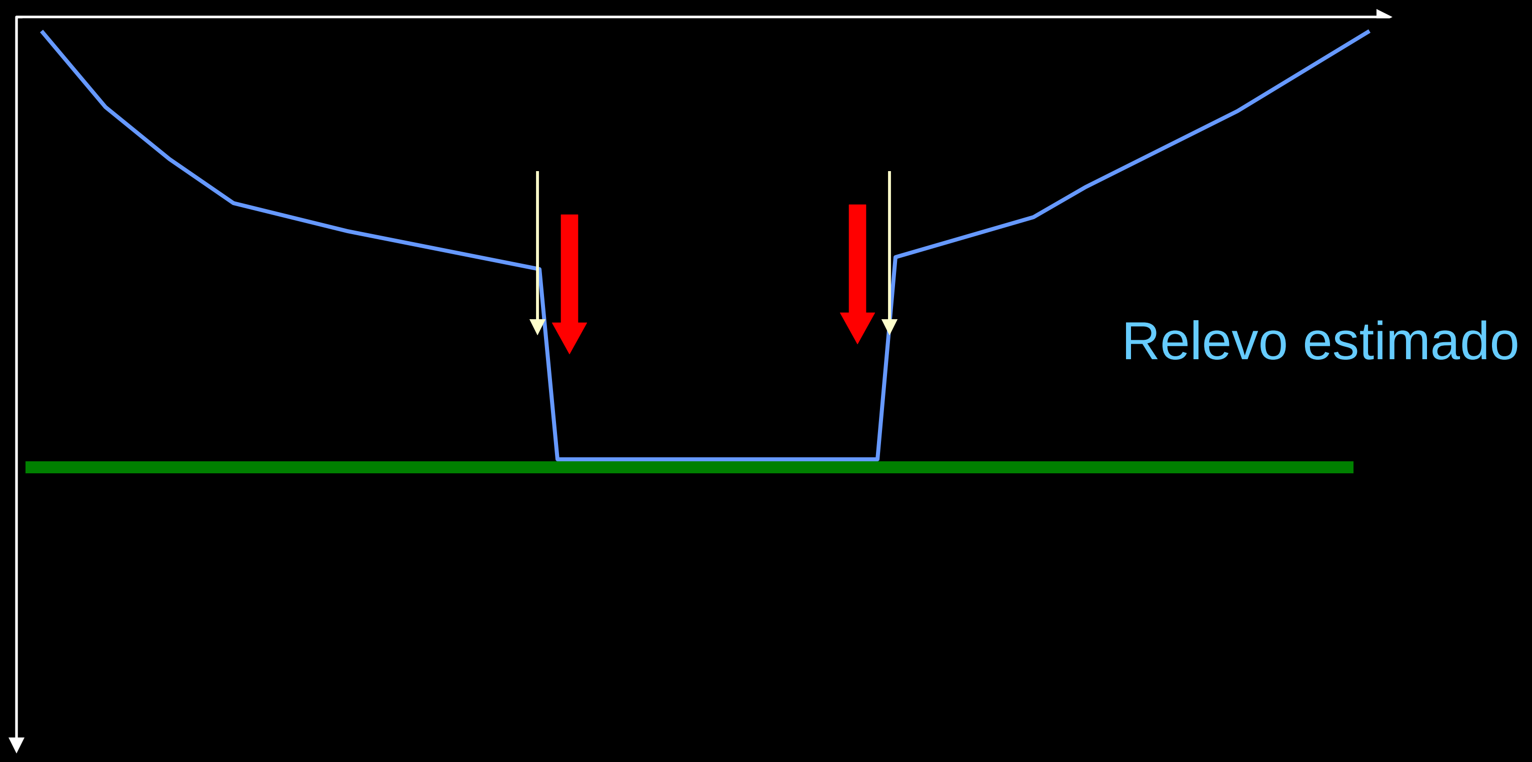
Igualdade relativa ponderada: proximidade entre alguns grupos de parâmetros adjacentes



Igualdade relativa ponderada

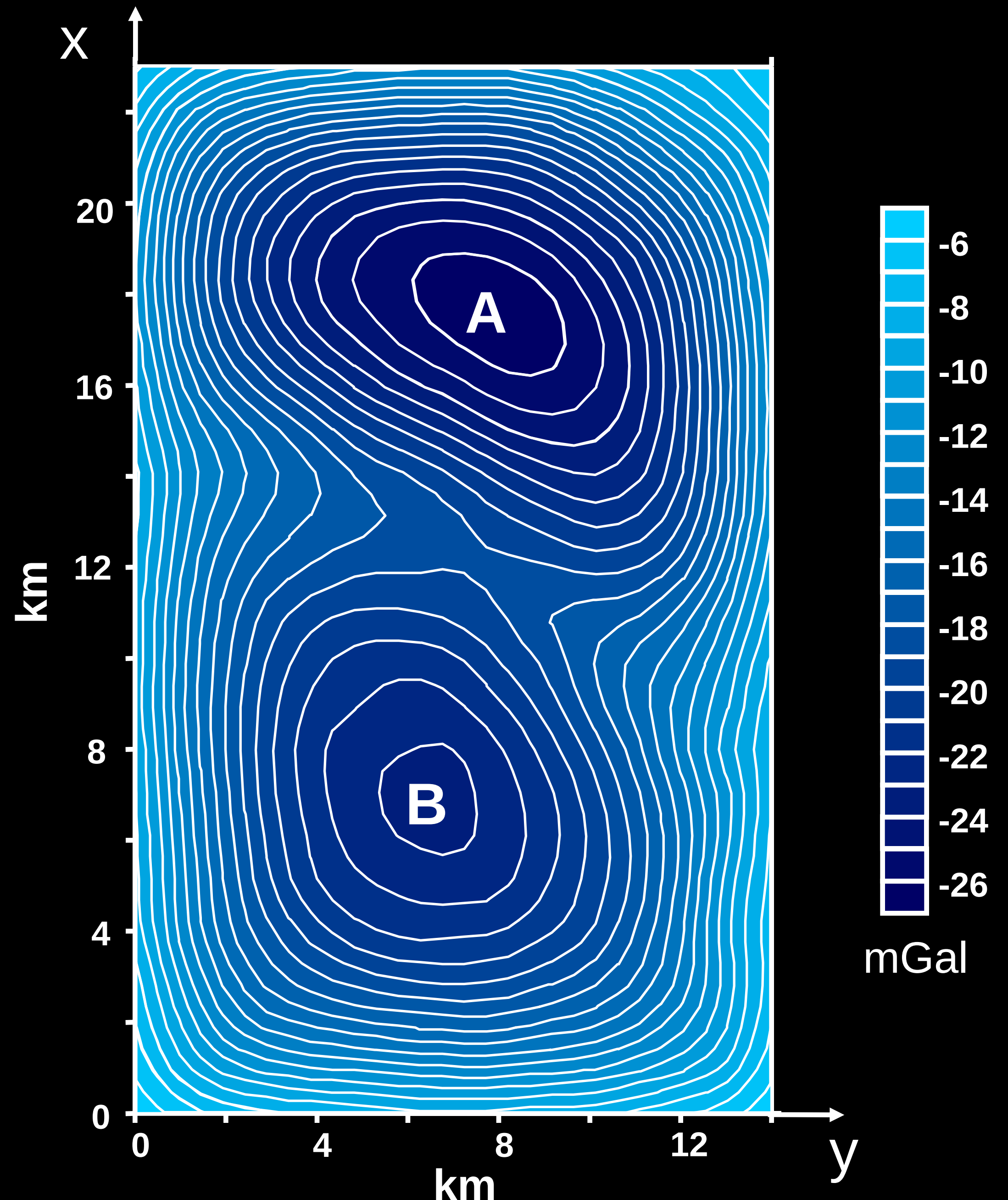
Desigualdade

Igualdade absoluta



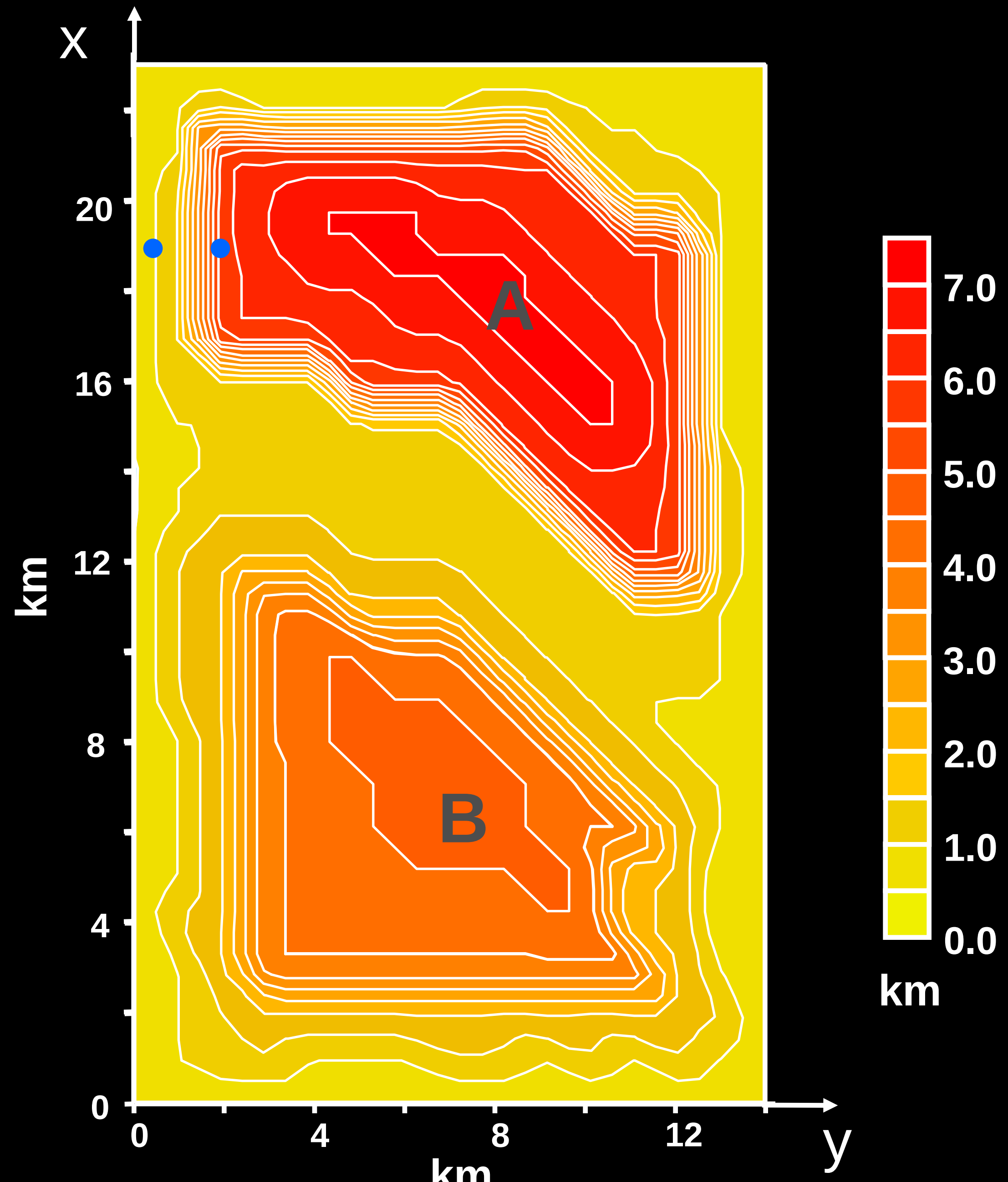
Anomalia Bouguer

Dados sintéticos



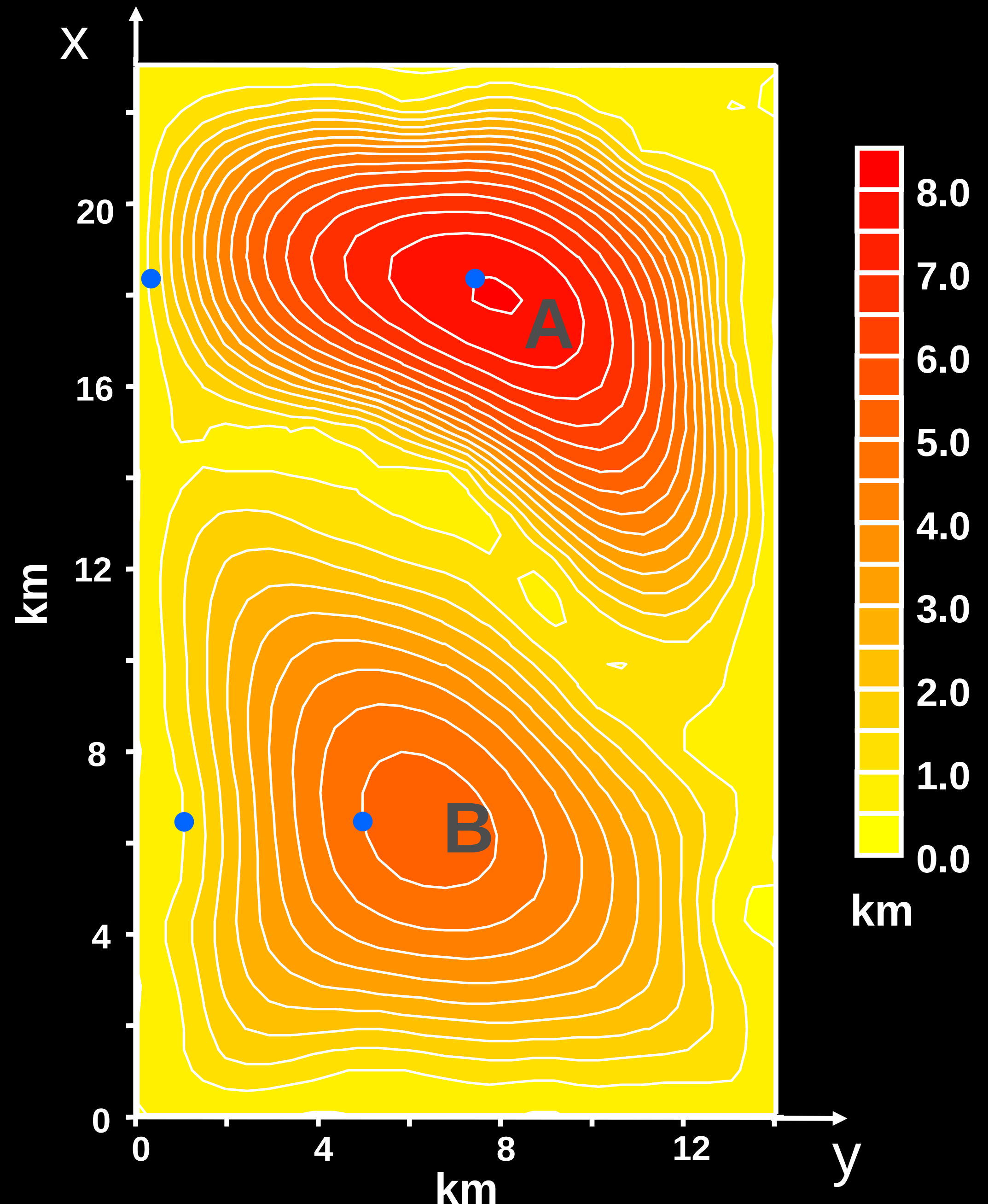
Relevo verdadeiro

Dados sintéticos



Suavidade global

Dados sintéticos

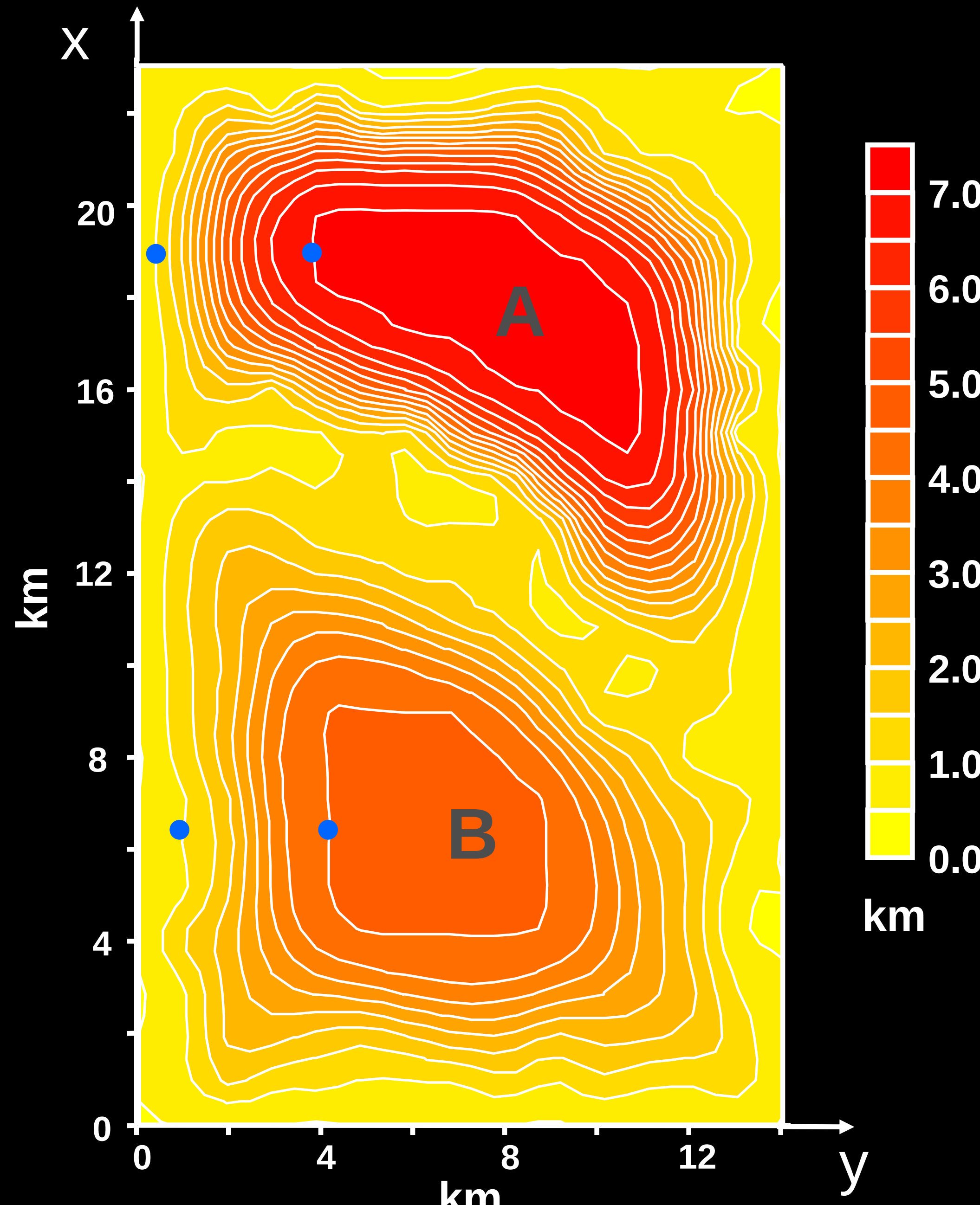


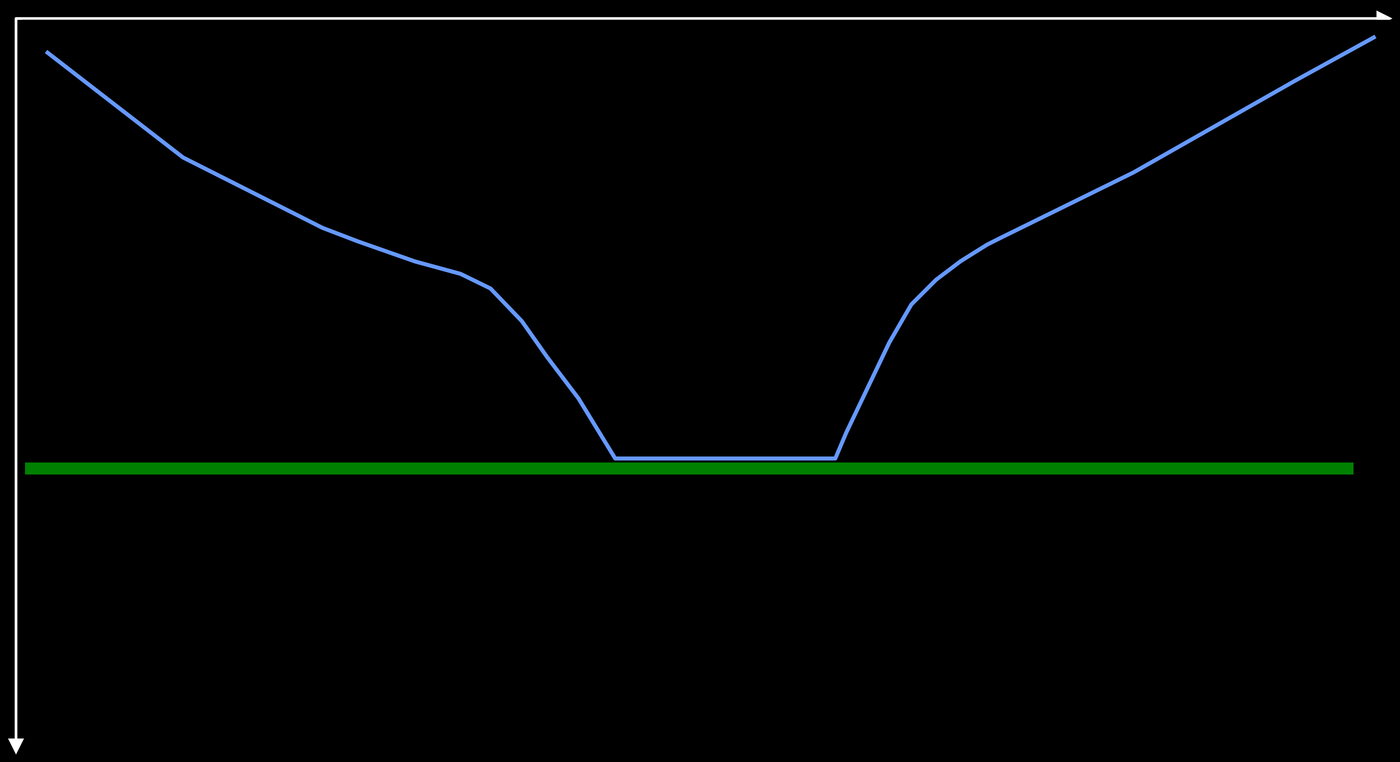
Suavidade global

+

Desigualdade

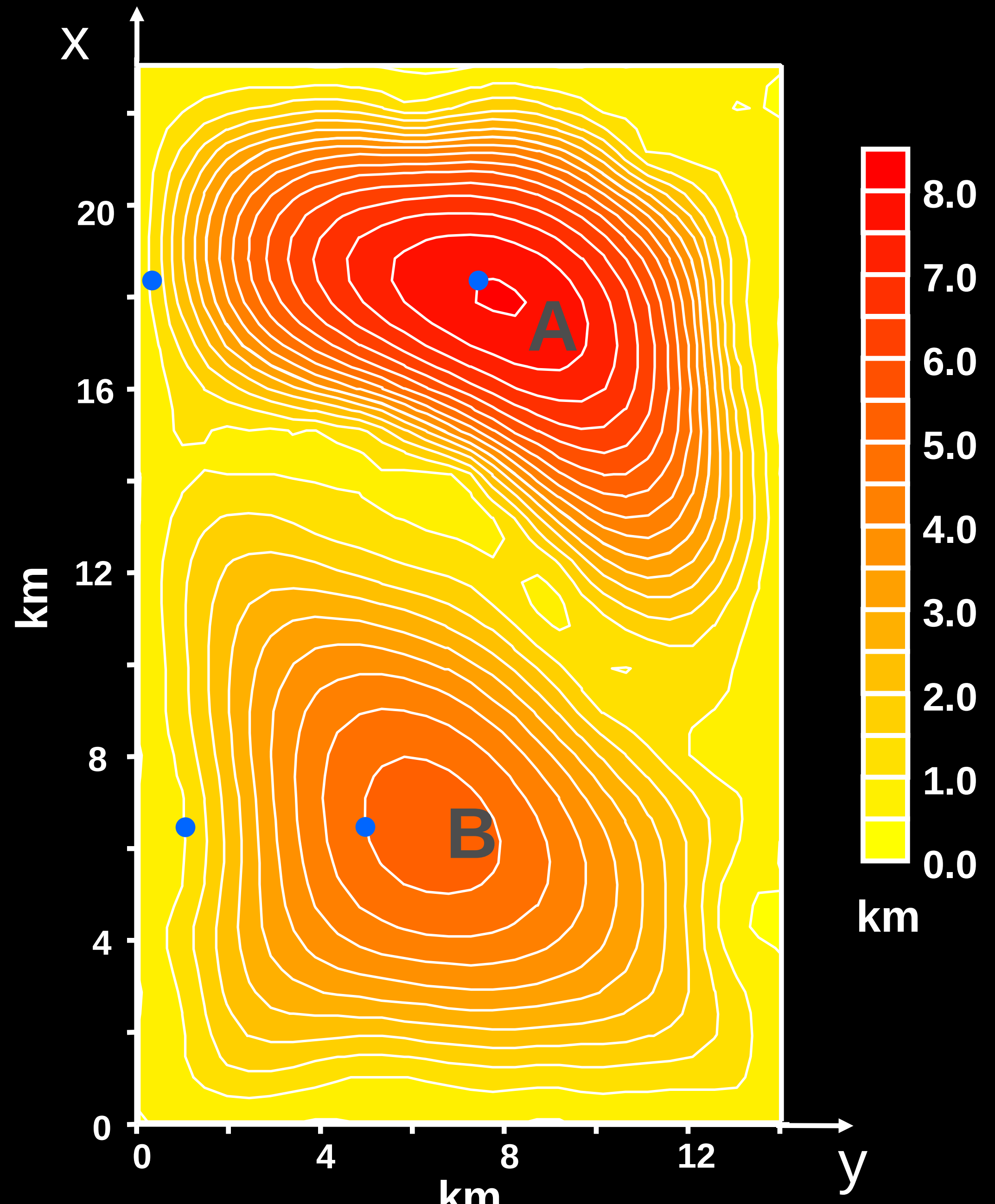
Dados sintéticos





Suavidade global

Dados sintéticos

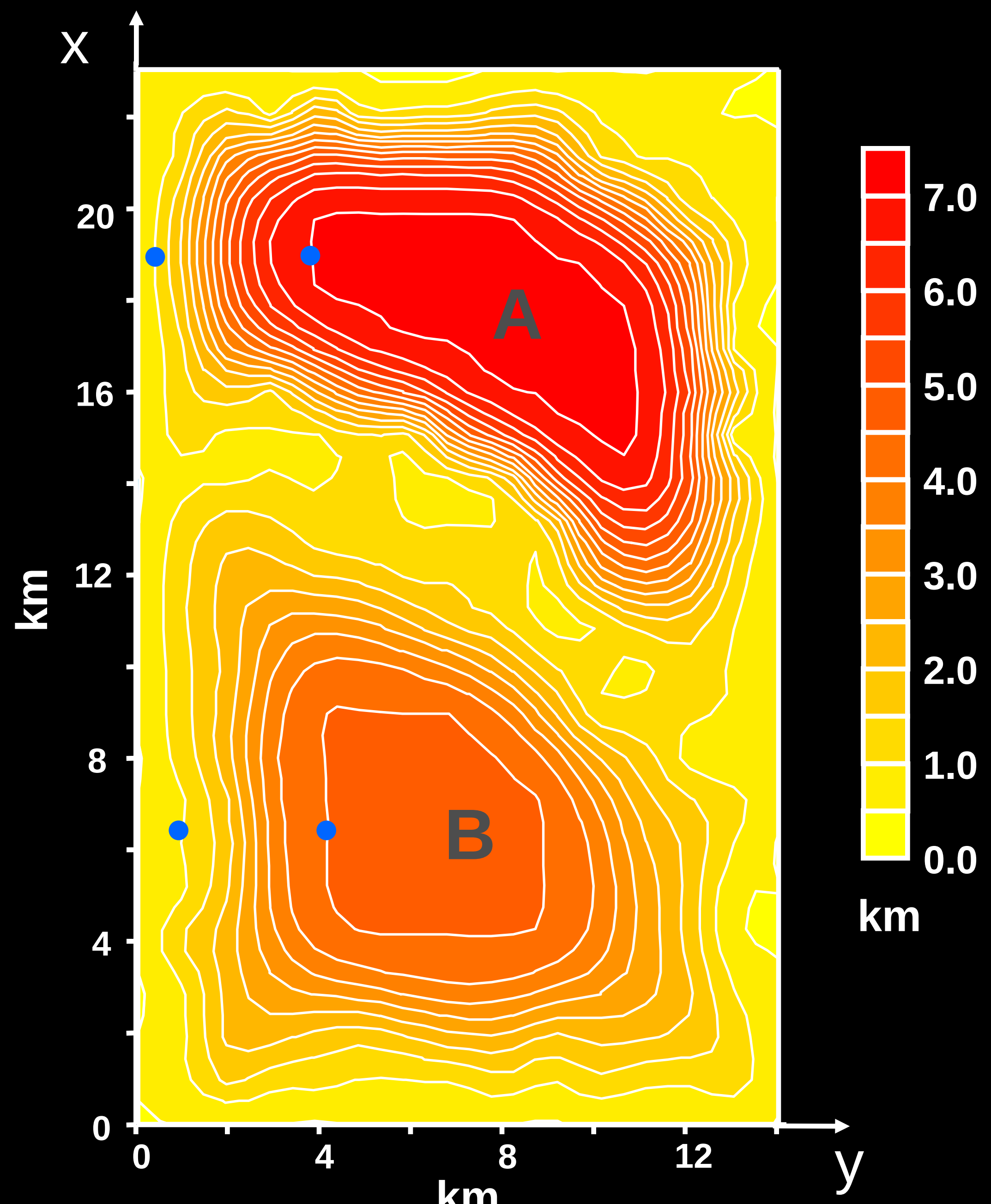


Suavidade global

+

Desigualdade

Dados sintéticos



Suavidade ponderada

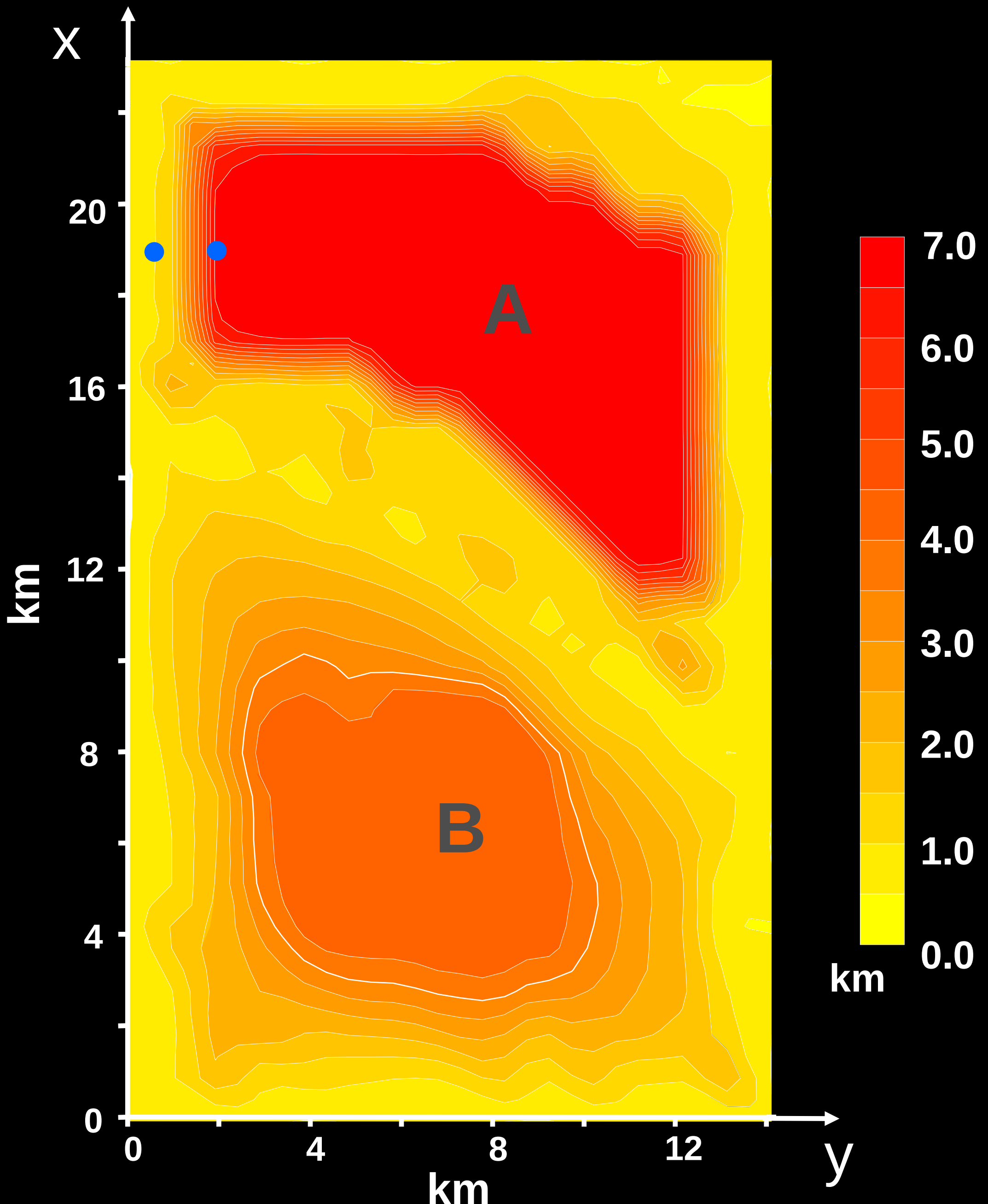
+

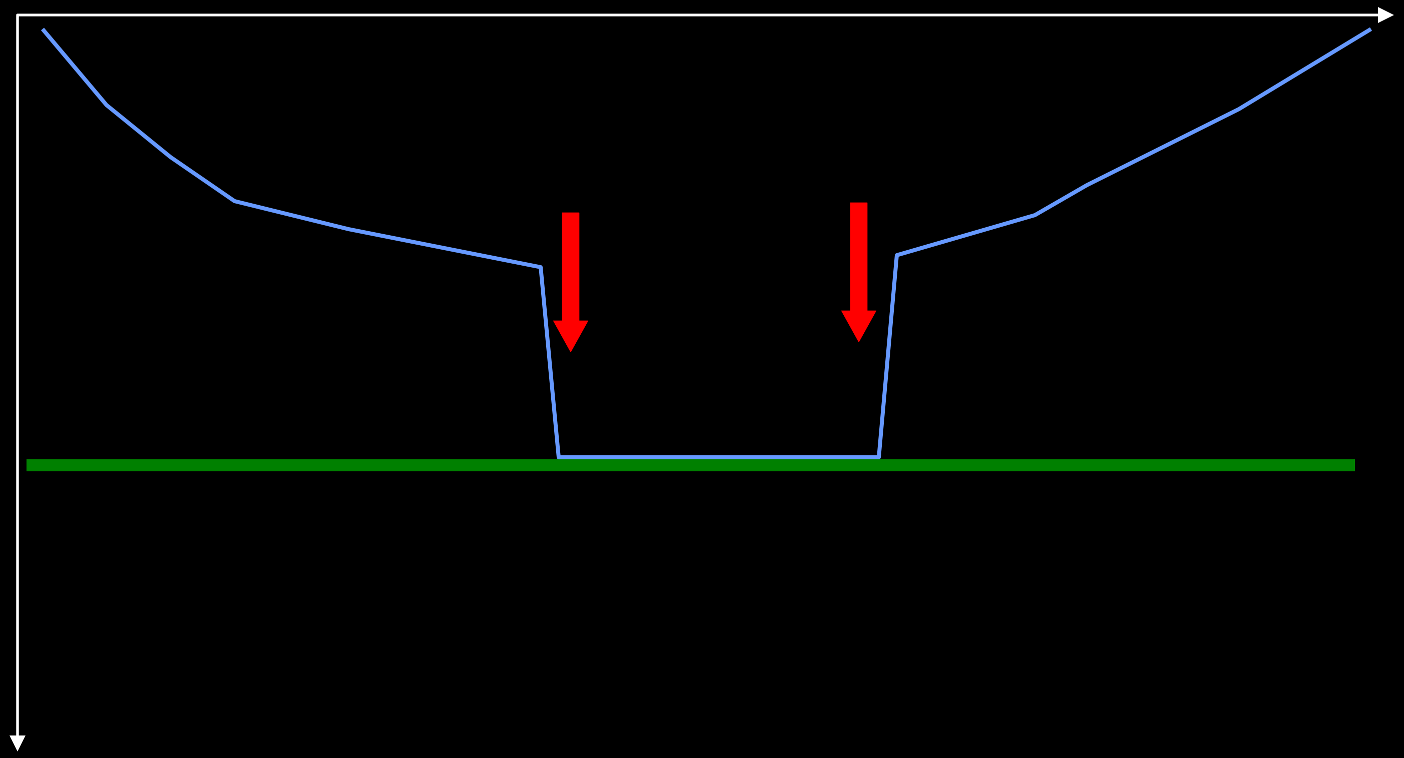
Desigualdade

+

Igualdade absoluta

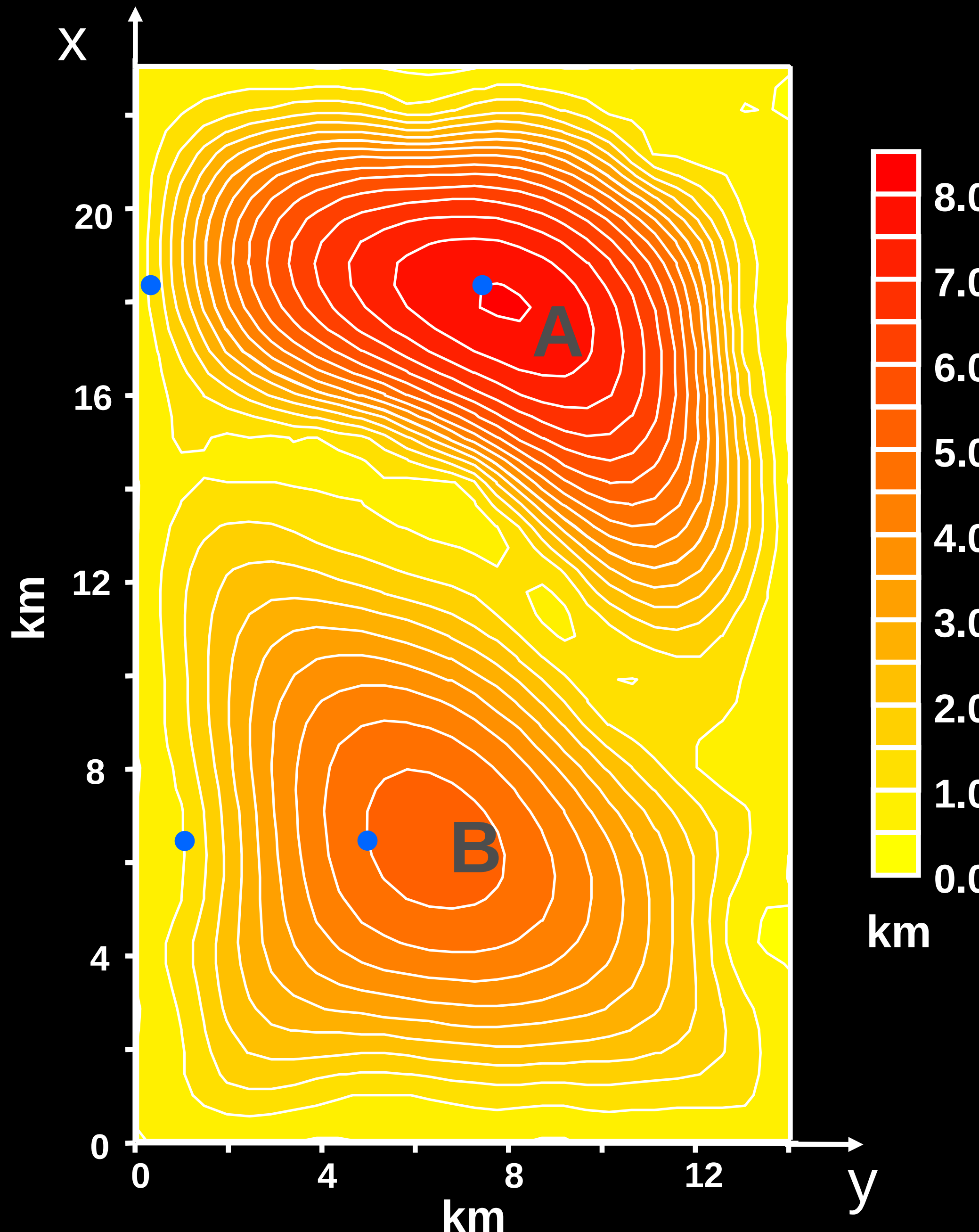
Dados sintéticos





Suavidade global

Dados sintéticos

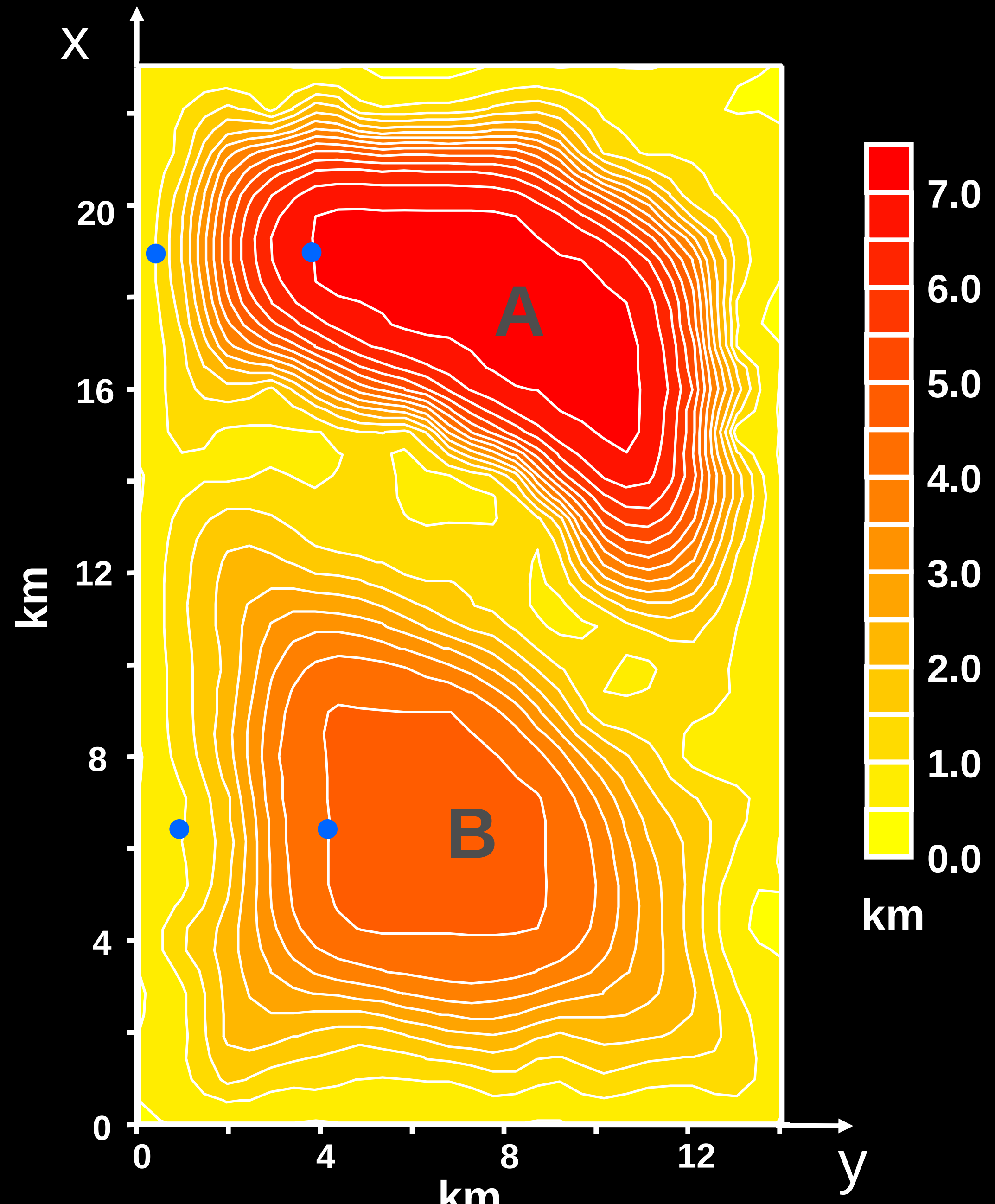


Suavidade global

+

Desigualdade

Dados sintéticos



Suavidade ponderada

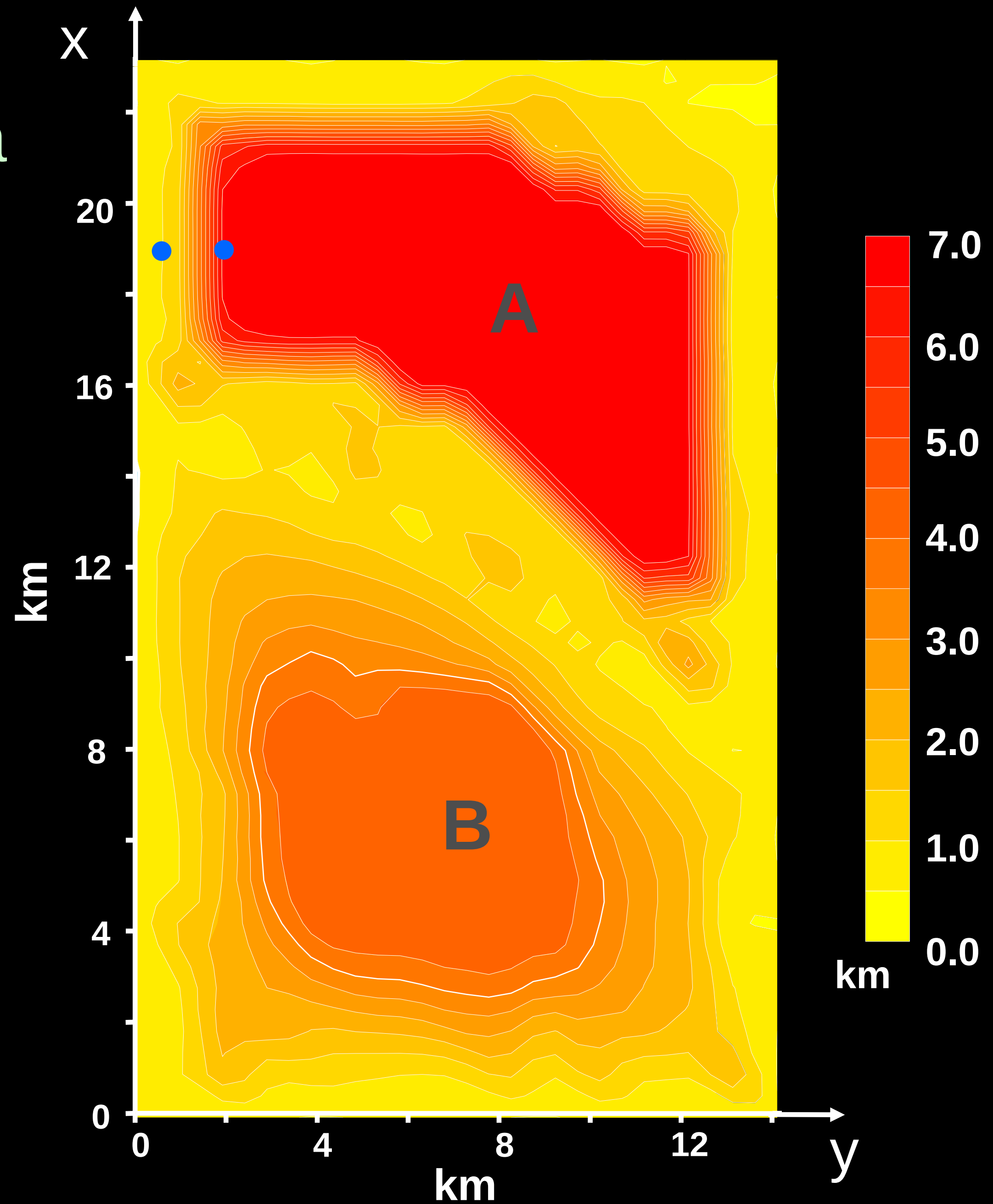
+

Desigualdade

+

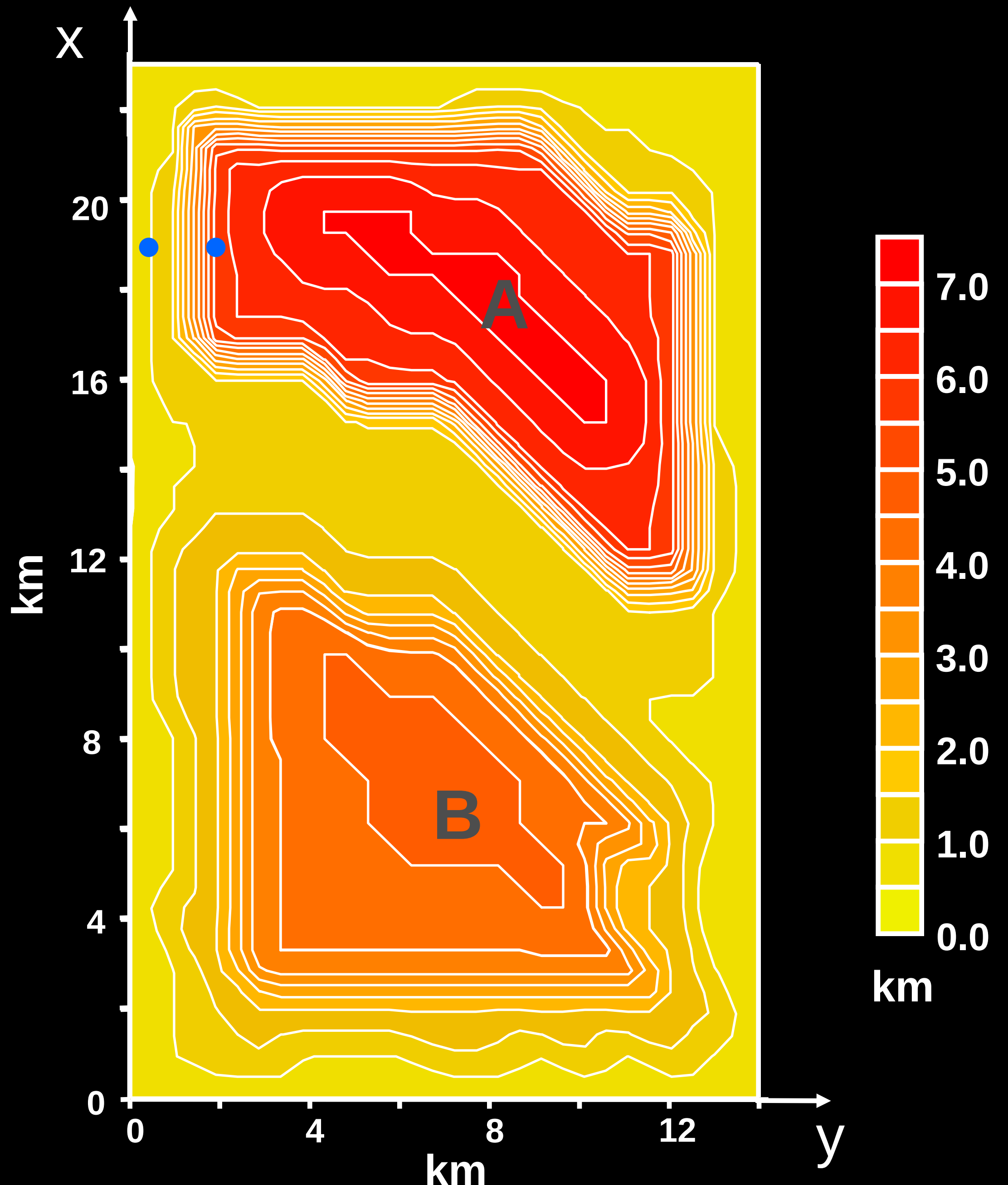
Igualdade absoluta

Dados sintéticos



Relevo verdadeiro

Dados sintéticos

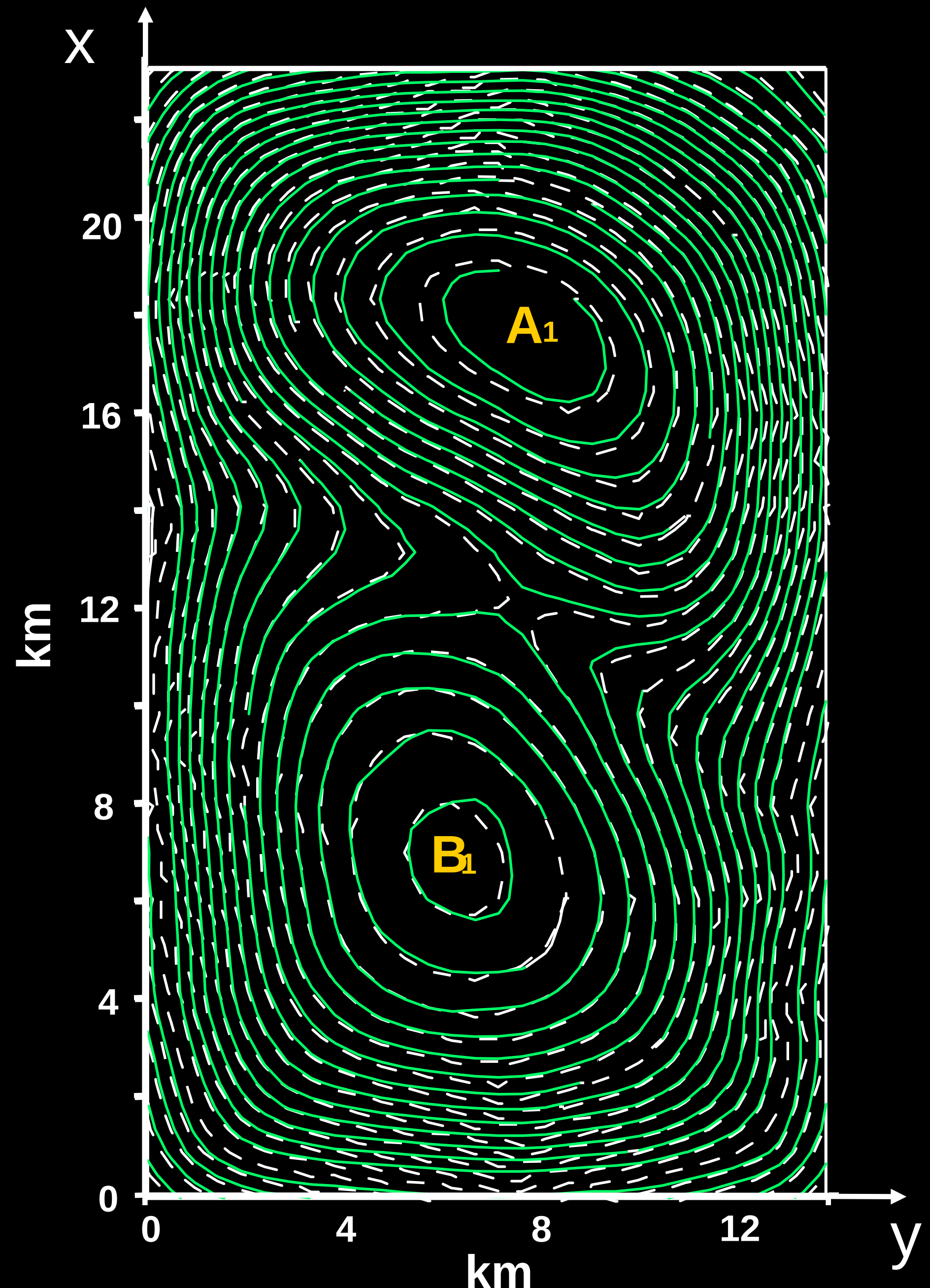


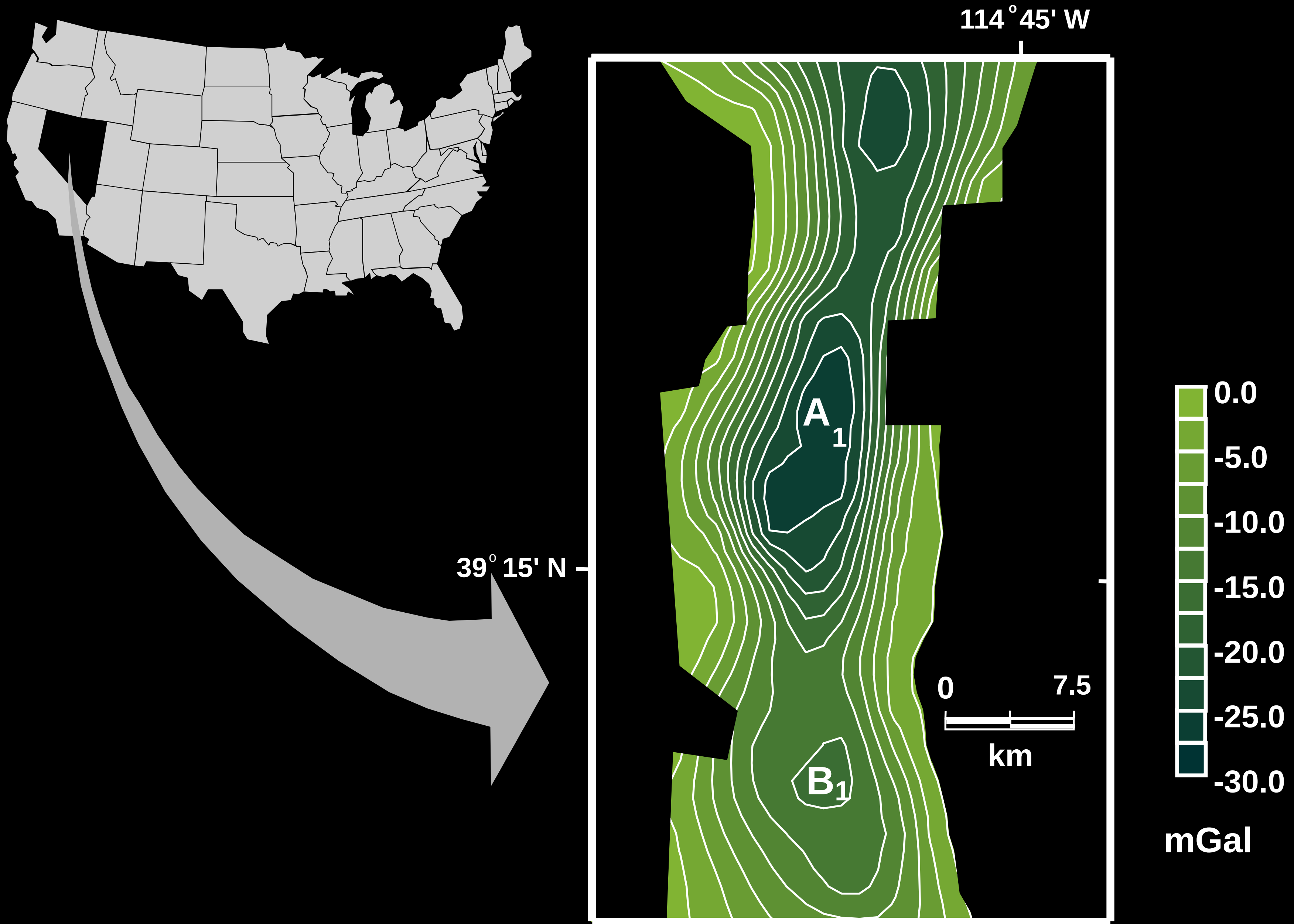
Anomalias

Observada e

Calculada

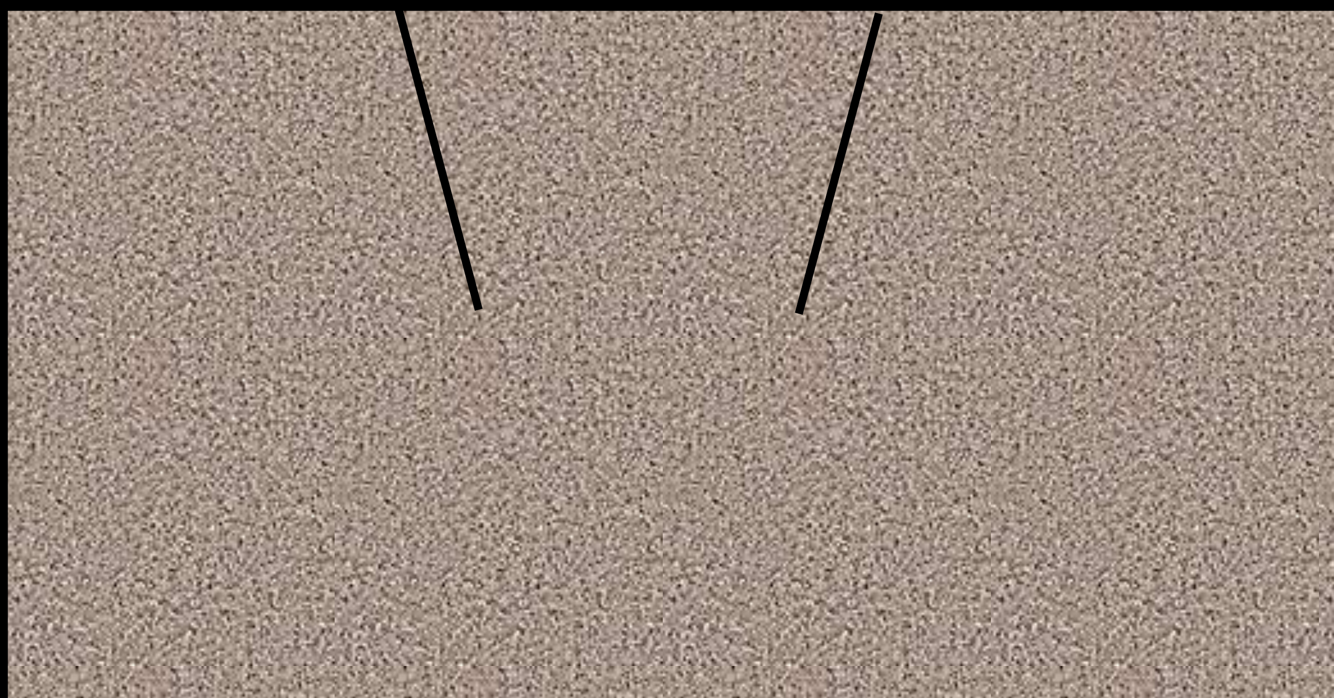
Dados sintéticos



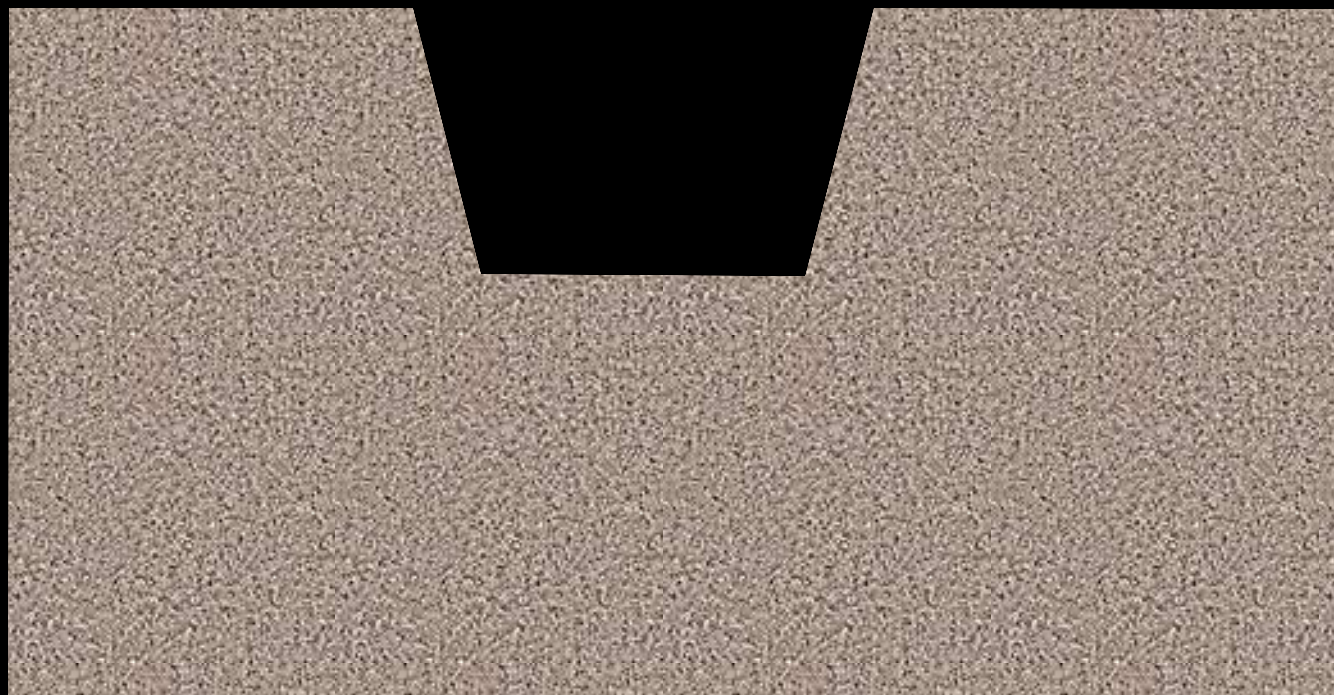


114° 45' W
39° 15' N
A1
B1
0
7.5
km
0.0
-5.0
-10.0
-15.0
-20.0
-25.0
-30.0
mGal

Província “Basin and Range”

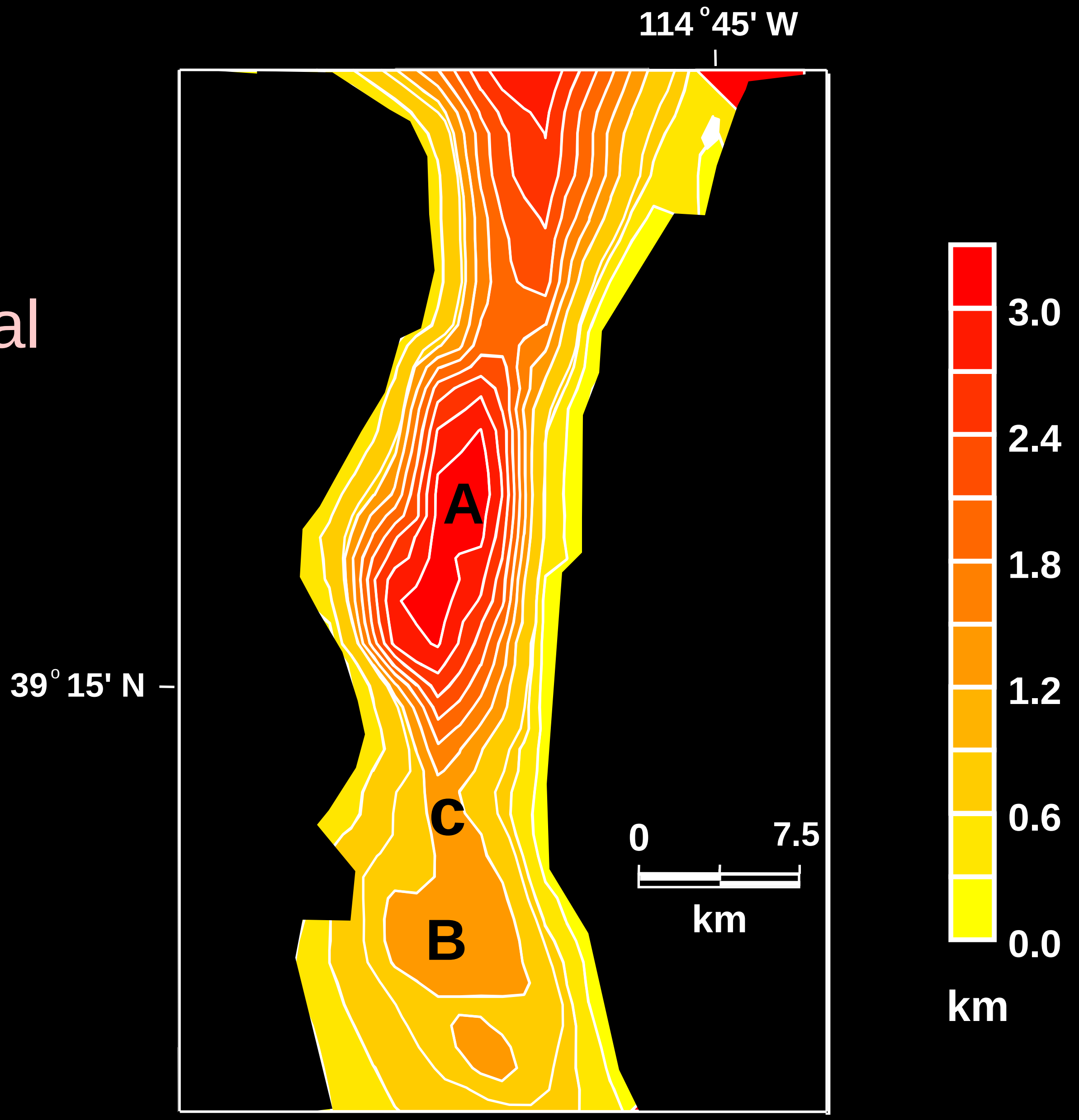


Província “Basin and Range”



Steptoe Valley

Suavidade global



Steptoe Valley

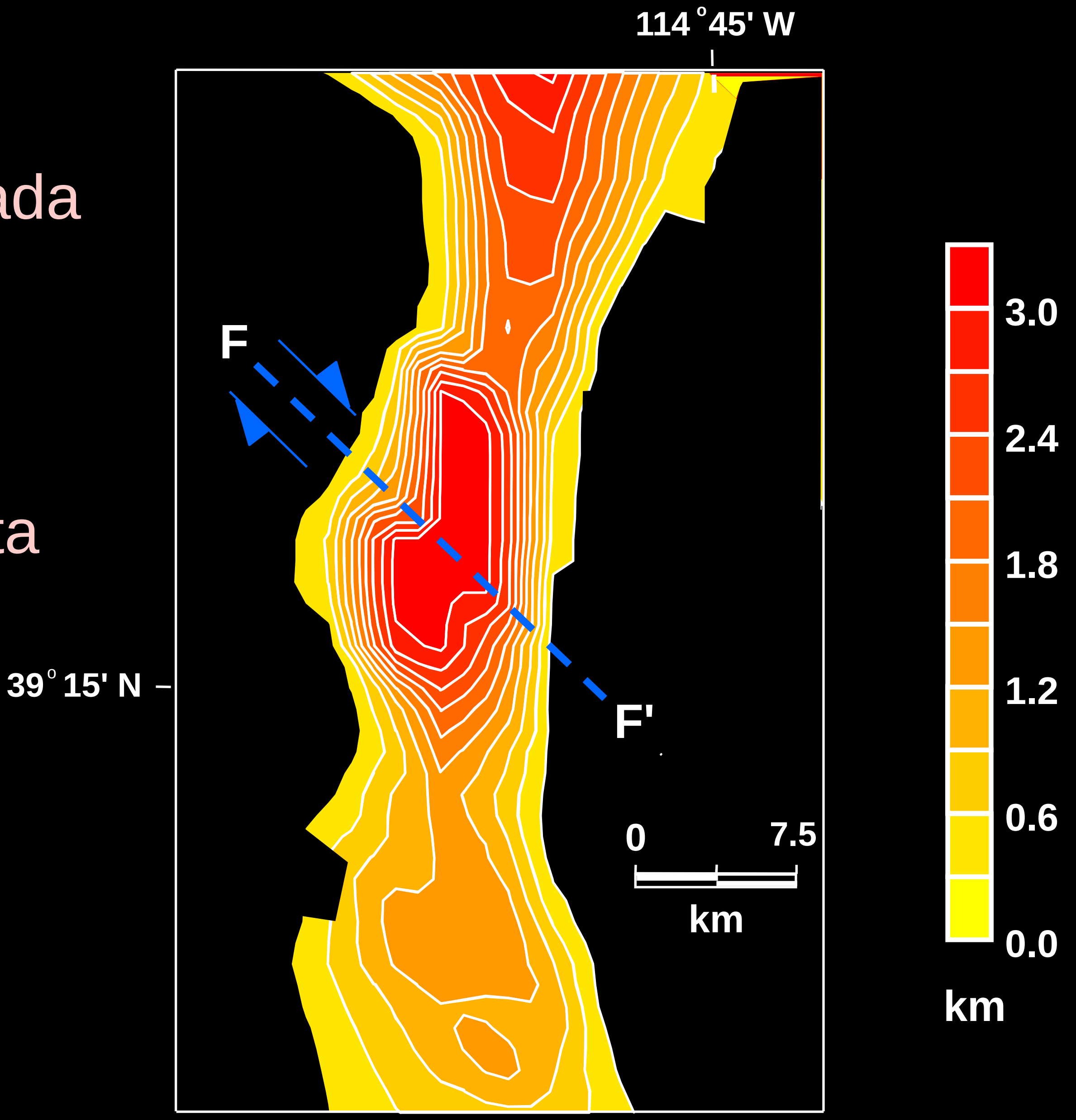
Suavidade ponderada

+

Desigualdade

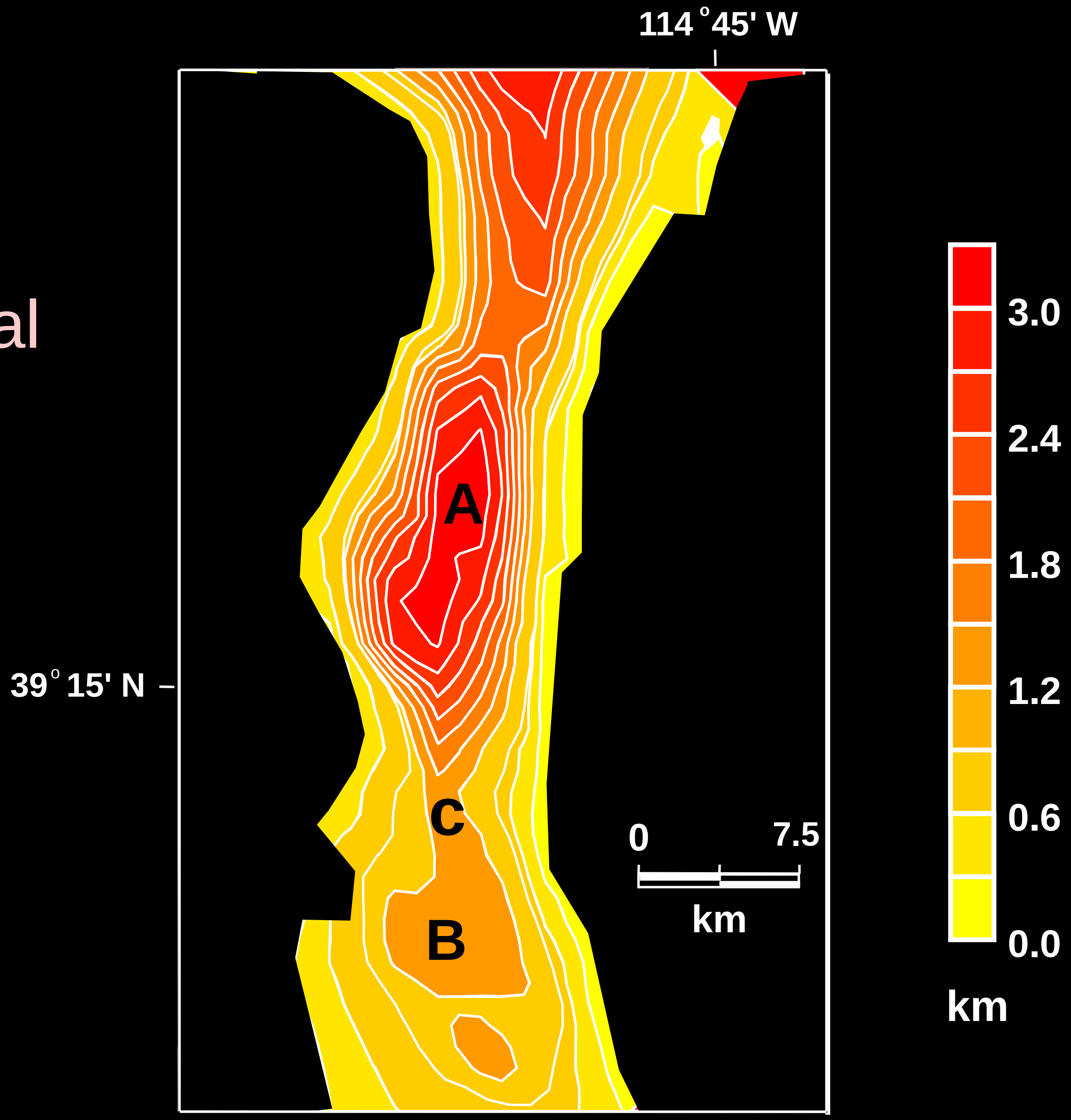
+

Igualdade absoluta



Steptoe Valley

Suavidade global



Steptoe Valley

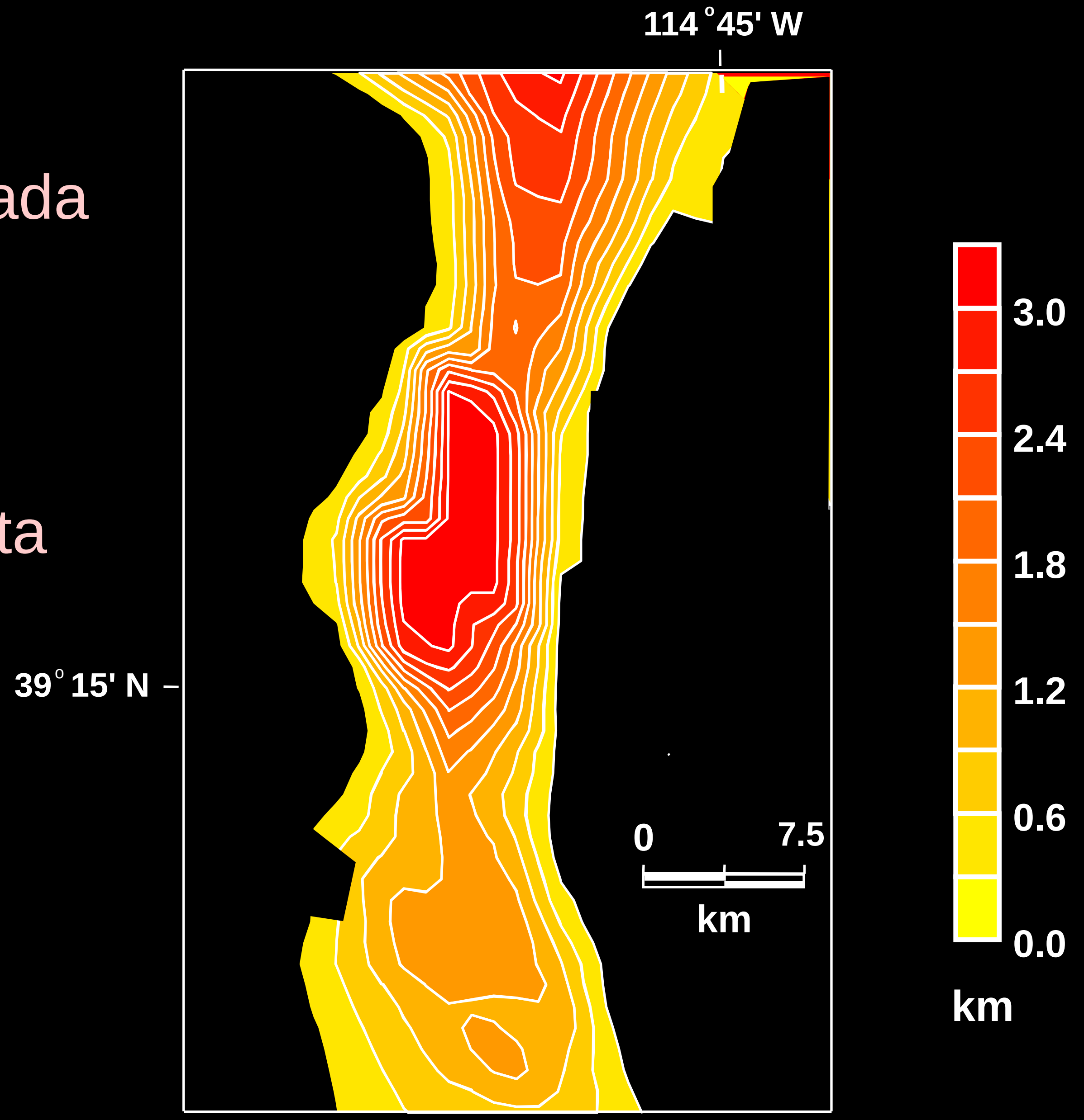
Suavidade ponderada

+

Desigualdade

+

Igualdade absoluta

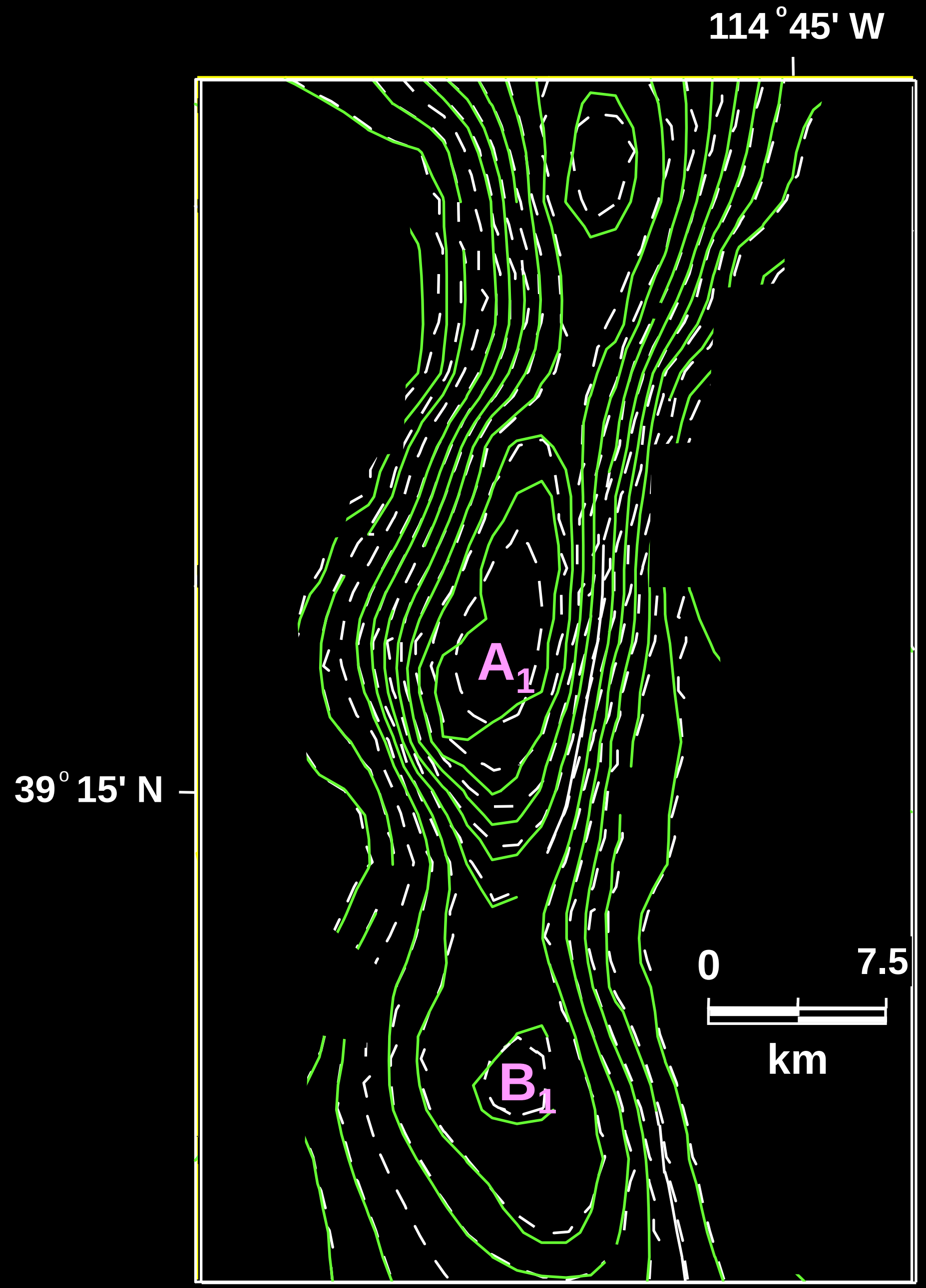


Steptoe Valley

Anomalias

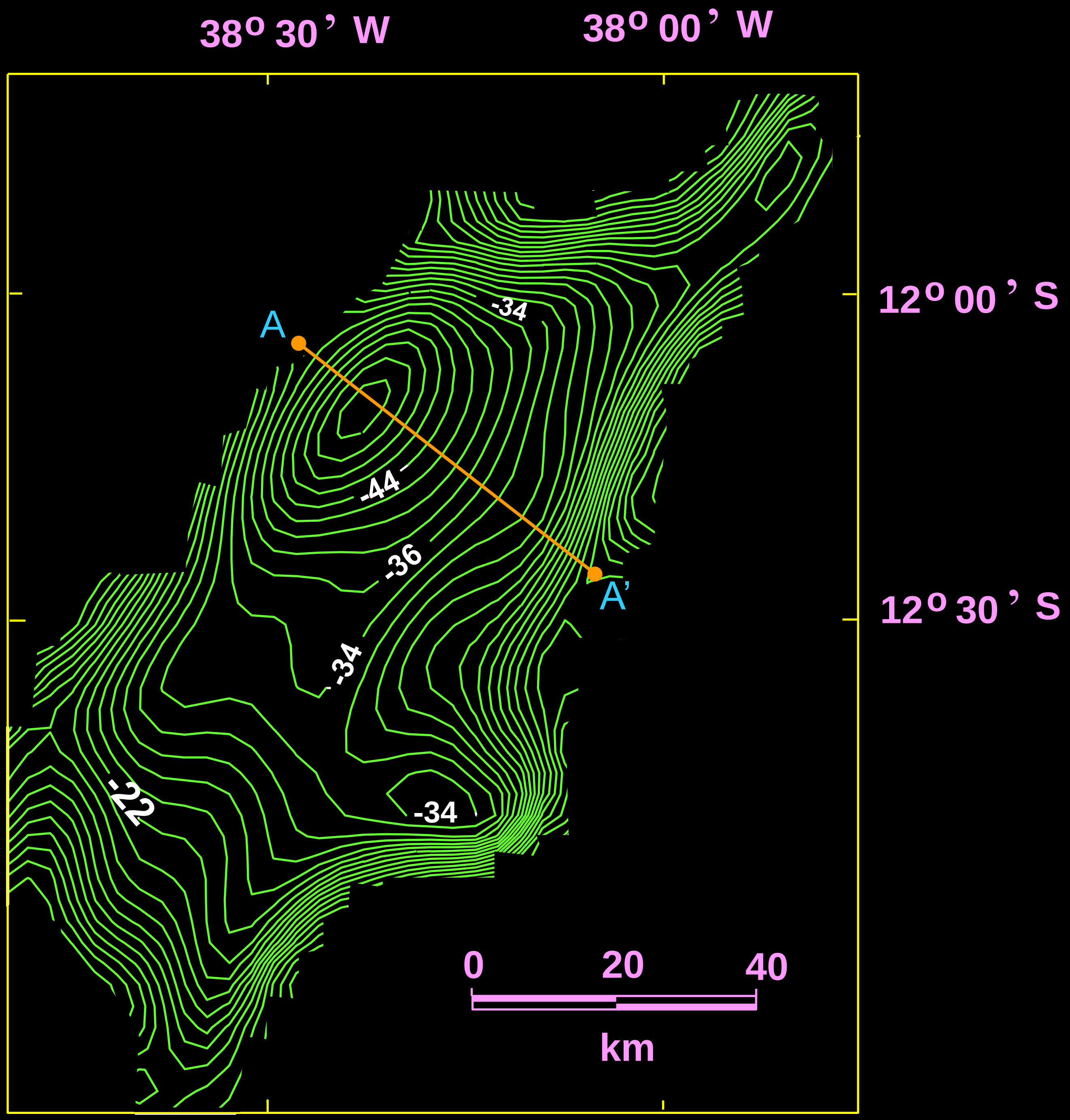
Observada e

Calculada

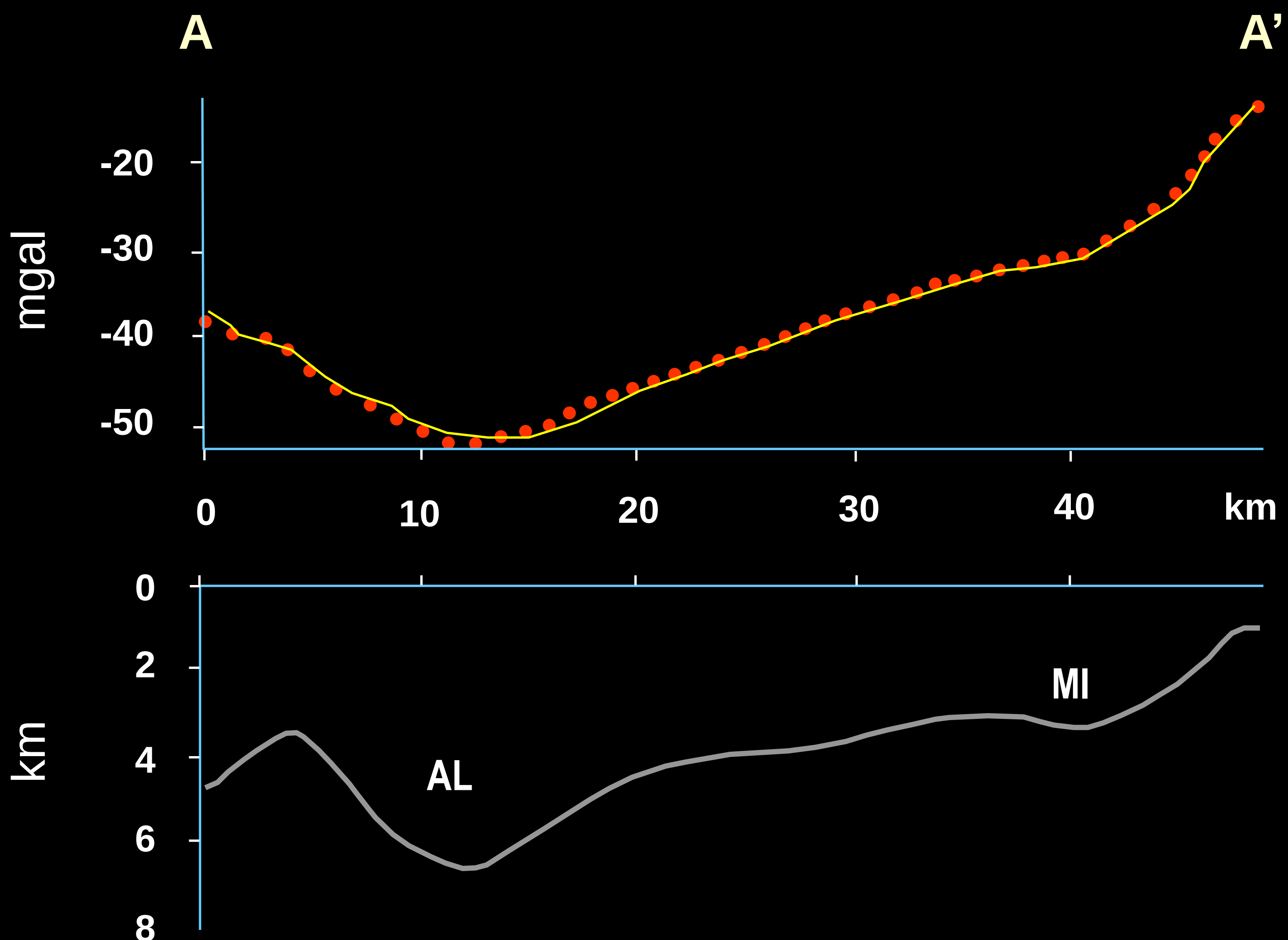


Recôncavo

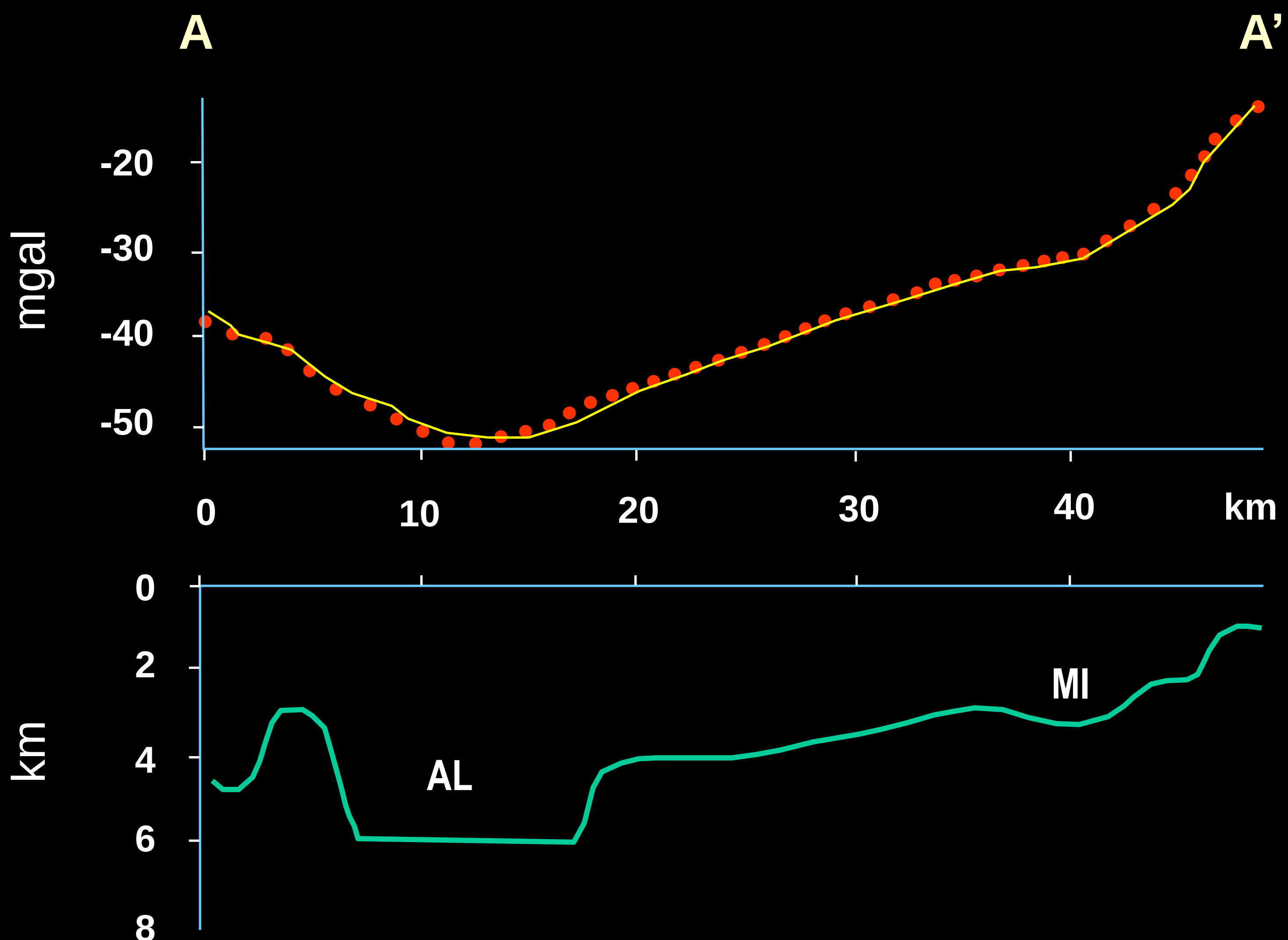
Anomalia Bouguer

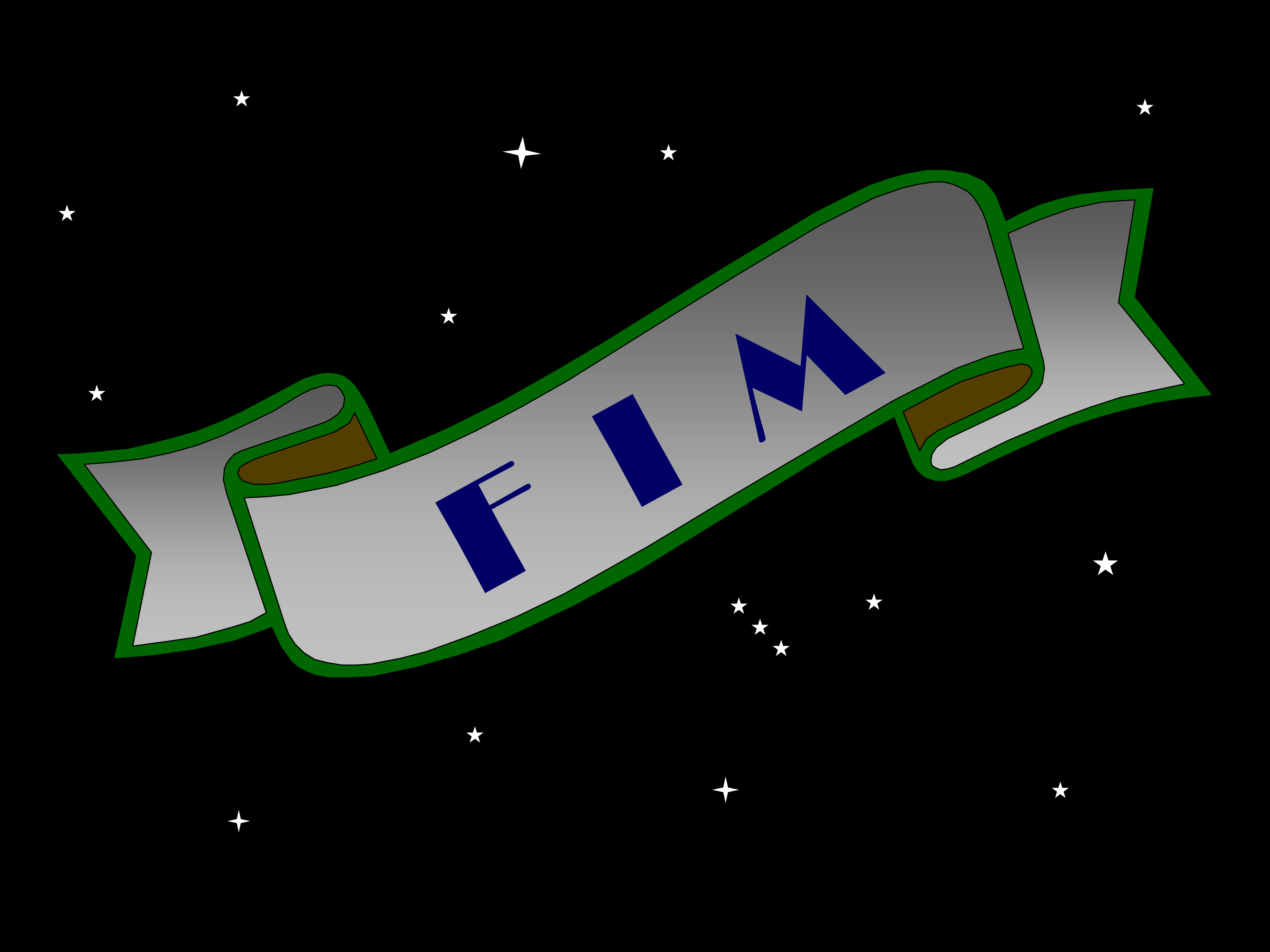


Recôncavo – Suavidade global



Recôncavo – Suavidade ponderada + desigualdade + igualdade absoluta




FIM